

Signatur

3 2096

Bibliothek des Instituts für Weltwirtschaft
an der Universität Kiel

BIBLIOTHEK
DES K. K. HANDELSMINISTERS
EXZELLENZ DR. JOSEPH MARIA
BAERNREITHER

(12. IV. 1845 — 19. IX. 1925)

FÜR DIE BIBLIOTHEK DES
INSTITUTS FÜR WELTWIRTSCHAFT
UND SEEVERKEHR
KIEL

ERWORBEN AUS MITTELN DER
DR. GUSTAV DIEDERICHSEN-
STIFTUNG

1929

*Von dem k. k. Ackerbauministerium
an die k. k. Ackerbaubehörden,
in
Jenen Briefe vom 6. d. d. d.
erlassen des k. k. Ackerbauministeriums*
Anleitung

zur

Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien

für die

Versicherung von Leibrenten, Activitäts-, Invaliditäts- und Witwenrenten,

sowie zur

Berechnung der bezüglichen Prämienreserven

zum Zwecke der

Bilanz-Berechnung der Bruderladen.

Im Auftrage des k. k. Ackerbauministeriums

verfasst vom

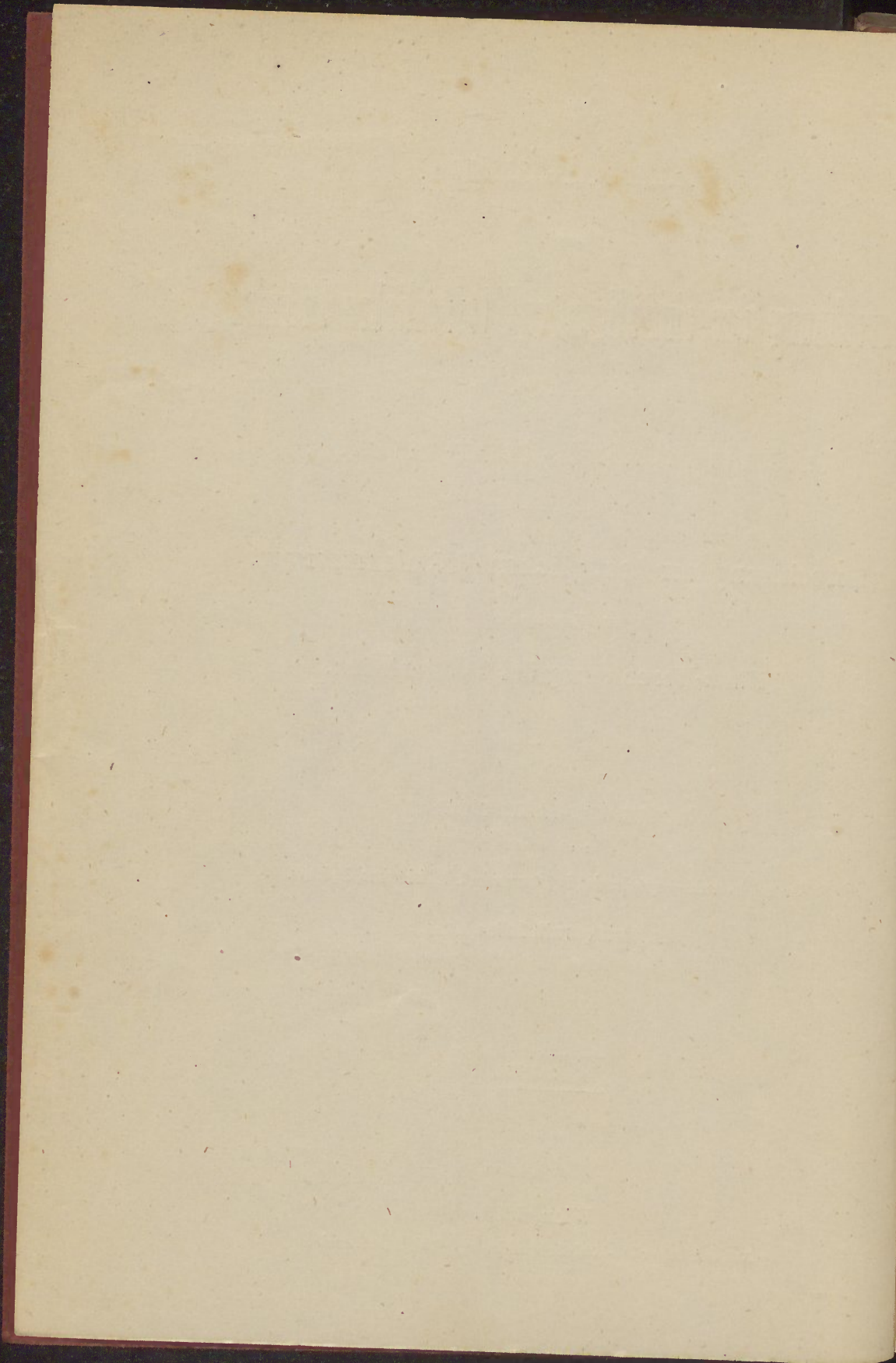
Vorstand des versicherungstechnischen Departements des k. k. Ministeriums des Innern,

Regierungsrath Julius Kaan.

Mit 9 Tafeln.

Wien, 1888.

Aus der kaiserlich-königlichen Hof- und Staatsdruckerei.



Anleitung

zur

Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien

für die

Versicherung von Leibrenten, Activitäts-, Invaliditäts- und Witwenrenten,

sowie zur

Berechnung der bezüglichen Prämienreserven

zum Zwecke der

Bilanz-Berechnung der Bruderladen.

Im Auftrage des k. k. Ackerbauministeriums

verfasst vom

Vorstand des versicherungstechnischen Departements des k. k. Ministeriums des Innern,

Regierungsrath Julius Kaan.

Mit 9 Tafeln.

Wien, 1888.

Aus der kaiserlich-königlichen Hof- und Staatsdruckerei.



Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort	5

I. Capitel.

§. 1. Zinsen und Zinseszinsen eines Capitals	7
§. 2. Mortalitäts- und Invaliditätstafeln	8

II. Capitel.

§. 3. Rentenversicherung einzelner Personen:	
I. Leibrenten und Activitätsrenten	10
II. Invaliditätsrenten (Invaliden-Pensionen, -Provisionen)	32
III. Terminliche Prämien für Invaliditätsrenten	45
§. 4. Lebenswahrscheinlichkeit, Activitätswahrscheinlichkeit	49
§. 5. Wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer, wahrscheinliche und mittlere Activitätsdauer	52
§. 6. Rentenversicherung verbundener Personen.	
I. Verbindungsrenten	55
II. Überlebensrenten (Witwen-Renten, -Pensionen, -Provisionen)	59
III. Terminliche Prämien für Witwenrenten	68

III. Capitel.

Die Reserven und deren Berechnung.

§. 7. Reserve der Versicherungsvereine.	
I. Allgemeine Bemerkungen	76
II. Prämienreserve einzelner Versicherungen	80
III. Prämienreserve einer grossen Anzahl von Versicherungen	89
§. 8. Reserve humanitärer Institute ohne versicherungstechnische Basis (Bruderladen, Knappschaftskassen), Schluss	90
Tafeln	97

Vorwort.

Die von den Bruderladen betriebene Invaliden-, Witwen- und Waisenversorgung gehört in das Gebiet der Rentenversicherungen. In der vorliegenden Schrift soll daher das für Bruderladzwecke Wesentlichste aus der Rentenversicherung möglichst elementar angeführt werden.

Zu diesem Ende wurde Einiges aus der Zinseszinsrechnung vorausgeschickt, dann eine Besprechung der für österreichische Berg- und Hüttenarbeiter gültigen Fundamentalzahlen vorgenommen und hierauf zur Ableitung der Formeln für die Auffindung gewisser Rentenwerte geschritten. Ganz besonders lag hiebei die Aufgabe vor, zu zeigen, durch welche mathematischen Entwicklungen man zu den im „Berichte über die im Auftrage des Ackerbauministers vorgenommenen Berechnungen, betreffend die österreichischen Bruderladen“¹⁾ enthaltenen Werten gelangen kann. Aber nicht allein des leichteren Verständnisses der dort sich vorfindenden Tabellen halber, sondern auch, um diejenigen

¹⁾ Veröffentlicht als Beilage zu Nr. 4 ex 1885 der österreichischen Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen. Der Kürze halber werden wir bei Berufungen die oben erwähnte Schrift, betitelt: „Bericht des Leiters des versicherungstechnischen Bureau, Regierungsrathes Kaan, über die im Auftrage des Ackerbauministers vorgenommenen Berechnungen, betreffend die österreichischen Bruderladen“ mit „Bericht“ bezeichnen.

Werte den beteiligten Kreisen zugänglich zu machen, welche die Witwen- und Waisenversorgung betreffen, ergab sich die Veranlassung zu der vorliegenden Schrift.

Soll die gegenwärtige Arbeit jedoch eine umfassende Ergänzung zu dem erwähnten Berichte sein, so darf das Capitel über die Prämienreserven nicht übergangen werden. Es wurden demnach auch die für den oben bezeichneten Zweck wichtigsten Grundsätze der Reservenberechnung einbezogen, um über das Wesen und die Erfordernisse einer versicherungstechnischen Bilanz im Allgemeinen Aufschluss zu geben, sowie um diejenigen Umstände in allgemeinen Umrissen darzulegen, welche bei Aufstellung einer mathematischen Bilanz für die bestehenden Bruderladen zu berücksichtigen sind.



I. Capitel.

§. 1.

Zinsen und Zinseszinsen eines Capitals.

Wenn das Capital C zu $p\%$ verzinst wird, so trägt es nach Ablauf eines Jahres an Zinsen:

$$Z_1 = C \cdot \frac{p}{100}.$$

Werden diese Zinsen nicht anderweitig verwendet, sondern wieder zum Capital hinzugeschlagen, so hat das Capital C am Anfange des zweiten Jahres den Wert:

$$C_1 = C + C \cdot \frac{p}{100} = C \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

worin

$$1 + \frac{p}{100} = q$$

gesetzt werden kann, und es wird:

$$C_1 = C \cdot q.$$

Sucht man die Zinsen Z_2 dieses Kapitals nach Ablauf eines zweiten Jahres, so sind dieselben:

$$Z_2 = C_1 \cdot \frac{p}{100},$$

und es ergibt sich, dass das Capital C mit Zinseszinsen am Ende des zweiten Jahres die Höhe von:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100} = C \cdot q^2$$

erreicht hat.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass am Ende des n^{ten} Jahres durch weitere Berücksichtigung jährlicher Zinseszinsen ein Capital:

$$C_n = C \cdot q^n$$

vorhanden sein muss.

Auf Grund der so erhaltenen Formel, und wenn C_n bekannt ist, kann man sofort bestimmen, wie groß bei Berechnung jährlicher Zinseszinsen mit $p\%$ das Anfangscapital C sein muss, um am Ende des n^{ten} Jahres ein Capital C_n zu erhalten; es ist nämlich:

$$C = \frac{C_n}{q^n}.$$

Das Endcapital C_n wird auch der zukünftige Wert des Capitals C , d. i. nach n Jahren genannt, und das Anfangscapital C als gegenwärtiger Wert des nach n Jahren vorhandenen Capitals C_n bezeichnet.

§. 2.

Mortalitäts- und Invaliditätstafeln.

Sowohl des Menschen Leben als auch die Erwerbs-, Arbeitsfähigkeit desselben sind beschränkt, denn Natur und Lebensweise sorgen dafür, dass früher oder später der Organismus Schaden leidet, dass derselbe entweder nicht mehr in gesetzmäßiger Weise functionirt oder zu functioniren ganz aufhört. Die Erfahrung lehrt, dass je älter der Körper wird, derselbe um so weniger zerstörenden Einflüssen widersteht, sie zeigt aber auch, dass das Kindesalter besonderen Gefahren ausgesetzt ist. Welche Verhältnisse demnach auch immer Invalidität oder den Tod hervorbringen mögen, die Statistik hat auf Grund sorgfältiger Beobachtungen nachgewiesen, dass die beiden genannten Umstände in Wesenheit vom Alter abhängen, und es gelang derselben, für die verschiedenen Altersklassen sowohl die Sterblichkeit als auch die Invalidität durch Zahlen auszudrücken, welche in eigenen Tafeln zusammengestellt die sogenannten Sterblichkeits- und Invaliditätstafeln bilden.

Eine solche Sterblichkeitstafel gibt nun für jedes in vollen Jahren angeführte Alter die Anzahl derjenigen Personen an, welche von einer bestimmten Anzahl von Lebenden eines gewissen Alters nach Ablauf von 1, 2, 3, ... m , ... Jahren noch leben. Wir unterscheiden im zunächst Folgenden eine Sterblichkeitstafel für „Männer überhaupt“ (active und invalide Männer zusammengekommen), eine solche für Frauen, endlich für die bereits invaliden Männer, deren Sterblichkeit bei gleichem Alter erfahrungsgemäß größer ist als die der „lebenden Männer überhaupt“, eine besondere Sterblichkeitstafel. Wird jedoch hinsichtlich der Männer nicht nur das Leben, sondern auch die Arbeitsfähigkeit in Betracht gezogen, so ist zum Nachweise des bezüglichen Verlaufes die Invaliditäts-

tafel erforderlich, welche angibt, wie viele von einer Anzahl activer, d. h. arbeitsfähiger Männer in jedem folgenden Alter noch activ sind.

Von den vorhandenen guten Sterblichkeitstafeln, insbesondere von denen, welche Männer und Frauen getrennt anführen, sind jene nach Brune-Fischer als die für Bergarbeiterverhältnisse geeignetsten zu bezeichnen. Diese Tafeln sind daher in der Gestalt, in welcher sie den späteren Berechnungen der Rentenwerte für verbundene Leben (Männer und Frauen) zu Grunde liegen, der Vollständigkeit halber und auch deshalb im Anhange zur vorliegenden Schrift auf Tafel I, Colonne 2 und 3 beigelegt, weil auf Colonne 3 derselben die Berechnung der Leibrentenwerte für Frauen und auf Colonne 2 der genannten Tafel die Construction der im „Berichte“ auf Tabelle I befindlichen Colonne 6 beruht.

Wie in diesem „Berichte“ nämlich angeführt, ergab sich, nachdem ermittelt wurde, welcher Grad des Invalidwerdens österreichischen Montanarbeitern zukommt, und wie groß die Sterblichkeit der lebenden Invaliden ist (siehe Tab. III, Col. 2 des citirten Berichtes), zum Zwecke der Aufstellung der Tafel der Activen (Tab. I, Col. 7 desselben Berichtes) und der sich anschließenden Tafel (Col. 8) der im Laufe des Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Invaliden die Nothwendigkeit, die Tafel der lebenden Männer überhaupt hinsichtlich der untersten Altersklassen zu ergänzen, d. h. mit 100.000 fünfzehnjährigen Männern zu beginnen und eine den diesbezüglichen Erfahrungen angemessene Correctur der Zahlen der „Lebenden“ in den obersten Altersklassen vorzunehmen.

II. Capitel.

§. 3.

Rentenversicherung einzelner Personen.

I. Leibrenten und Activitätsrenten.

Wenn von 100000 Personen jede einzelne nach Ablauf eines Jahres den absoluten Anspruch auf 1 fl. erreichen will, so sind zu dieser Zeit bedingungslos und im ganzen 100000 fl. fällig. Der gegenwärtige Wert dieses Capitals ist aber gemäß §. 1 und bei 4%iger Verzinsung $\frac{100000}{1.04}$ fl., sonach wäre von jeder Person zum angedeuteten Zwecke sofort der Betrag von $\frac{\frac{100000}{1.04}}{100000} = \frac{1}{1.04}$ fl. zu erheben.

Soll der Anspruch auf 1 fl. von den 100000 Personen erst nach 2 Jahren erlangt werden, so hat sich unter der Voraussetzung jährlicher Zinseszinsen jede Person zu verpflichten, vorher $\frac{1}{1.04^2}$ fl., und wenn m Jahre vorübergehen müssen, $\frac{1}{1.04^m}$ fl. zu leisten.

Wird der Umstand in Betracht gezogen, dass einige Personen von der bezeichneten Anzahl den Termin zur Auszahlung von 1 fl. möglicherweise nicht erleben, und festgesetzt, dass in diesem Falle auch der Anspruch auf Auszahlung verloren geht, so handelt es sich, wenn nunmehr der gegenwärtige Wert des künftig fällig werdenden Capitals ermittelt werden soll, nach §. 2 in erster Linie darum, zu erfahren, wie alt diese 100000 Personen sind, und in zweiter Linie um die Kenntnis ihrer Absterbeordnung.

Angenommen, es sollte bei einem Zinsfuße von 4% durch Baarzahlung ein Fond gegründet werden, um 100000 fünfzehnjährigen Männern, sobald sie 1 Jahr überleben, je 1 fl. zu sichern, so wären gemäß Tafel II, Colonne 2 des Anhanges nach einem Jahre 99465 fl. fällig, da von 100000 fünfzehnjährigen Männern das sechzehnte Lebensjahr eben nur so viele erreichen. Der gegenwärtige Wert dieses Capitals beträgt

aber $\frac{99465}{1.04}$ fl., und jeder fünfzehnjährige Mann, welcher sich an dem Unternehmen beteiligt, hätte $\frac{99465}{\frac{1.04}{100000}}$ fl. beizusteuern.

Müssen jedoch erst 2 oder 3, allgemein vielleicht m Jahre ablaufen, ehe 100000 gegenwärtig fünfzehnjährige Männer den bedingungsweisen Anspruch auf je 1 fl. erheben können, so beachte man, dass von diesen der zugehörigen Absterbeordnung zufolge nach 2 Jahren 98926, nach 3 Jahren nur noch 98383 oder allgemein nach m Jahren noch $\mathfrak{L}(15+m)$ Männer leben, wenn $\mathfrak{L}(15+m)$ nichts anderes bedeutet, als dass dieser Anzahl nach m Jahren naturgemäß das Alter von $15+m$ Jahren zukommt. Demnach sind in dem ersten Falle nach 2 Jahren 98926 fl., und wenn der zweite Fall vorliegt, also nach 3 Jahren, 98383 fl. oder auch allgemein nach m Jahren $\mathfrak{L}(15+m)$ fl. fällig, und die gegenwärtigen Werte dieser Capitale belaufen sich bei Berechnung jährlicher Zinseszinsen, wie bekannt, entweder auf $\frac{98926}{1.04^2}$ fl. oder auf $\frac{98383}{1.04^3}$ fl. oder allgemein auf $\frac{\mathfrak{L}(15+m)}{1.04^m}$ fl. Jeder fünfzehnjährige Mann, welcher in eine oder die andere Versicherung eintritt, hat folglich einen Beitrag zu leisten, der entweder die Höhe von $\frac{98926}{\frac{1.04^2}{100000}}$ fl. oder von $\frac{98383}{\frac{1.04^3}{100000}}$ fl., allgemein diejenige von:

$$\frac{\frac{\mathfrak{L}(15+m)}{1.04^m}}{\frac{1.04^m}{100000}} = \frac{\mathfrak{L}(15+m)}{\mathfrak{L}(15)} \text{ fl. erreicht.}$$

Es ist selbstverständlich, dass die Beiträge des Einzelnen dieselbe Höhe behalten, wenn unter sonst gleicher Voraussetzung nicht gerade 100000 fünfzehnjährige, sondern eine grössere oder kleinere Anzahl z. B. $N(15)$ solcher Männer wie oben versichert werden sollen, denn die Absterbeordnung ist etwas Gesetzmässiges, und die darin aufgeführten Zahlen (Decremente) sind als Maßstab aufzufassen, dem zufolge von N fünfzehnjährigen Männern allgemein nach m Jahren noch so viel leben, als die bezüglichen Verhältniszahlen anzeigen. Hienach besteht, wenn wir die gesuchte Anzahl Männer im Alter von $15+m$ Jahren mit x_{15+m} bezeichnen, allgemein die Proportion:

$$100000 : N(15) = \mathfrak{L}(15+m) : x_{15+m},$$

d. h. von N fünfzehnjährigen sind nach m Jahren noch:

$$x_{15+m} = N(15) \cdot \frac{\mathfrak{L}(15+m)}{100000} = N(15) \cdot \frac{\mathfrak{L}(15+m)}{\mathfrak{L}(15)}$$

Männer am Leben.

Auf dem Grundsätze der Proportionalität beruhen ferner auch die Berechnungen der Beiträge eines Einzelnen für ein beliebiges Alter, wenn ähnliche Versicherungen wie oben vorliegen. Ist also beispielsweise die Frage zu beantworten, wie viel wohl ein fünfundvierzigjähriger Mann zu zahlen hat, um nach 4 Jahren unter der Bedingung einen Anspruch auf 1 fl. zu besitzen, als er bis dahin noch lebt, so überlege man, dass, wenn 78185 Männer von 45 Jahren dieselbe Versicherung eingehen würden, nach 4 Jahren 73487 fl. fällig wären, da zufolge der Absterbeordnung für Männer von 78185 fünfundvierzigjährigen nach 4 Jahren eben noch 73487 Männer leben. Der gegenwärtige Wert des genannten Capitals berechnet sich nun bei 4% jährlicher Zinsen und Zinseszinsen mit $\frac{73487}{1.04^4}$ fl., also der Beitrag des Einzelnen beim Eintritte in die Versicherung mit $\frac{73487}{78185} \cdot \frac{1.04^4}{1}$ fl.

Es ist klar, dass, sobald bekannt wird, wie groß der Beitrag des Einzelnen für eine Capitalsversicherung von 1 fl. ist, sich durch einfache Multiplication sofort berechnen lässt, welche Höhe dieser Beitrag erreicht, wenn eine größere in Gulden auszahlbare Summe in Betracht kommt.

Handelt es sich aber um mehrere Capitalsversicherungen auf den Erlebensfall mit verschiedenen Auszahlungsterminen und auf eine und dieselbe Person bezüglich, so braucht man nur die gegenwärtigen Werte der einzelnen Versicherungen, respective die Beiträge des Einzelnen für jeden angegebenen Termin zu berechnen und gelangt zum Gesamtwerte aller Capitalsversicherungen, respective zum Gesamtbeitrage der beim Eintritt in die Versicherung x Jahre alten Person obneweiters durch Summation der einzelnen Werte, respective Beiträge. Wenn nun einer x -alterigen Person auf eine Reihe von Lebensjahren oder gar auf die ganze Lebenszeit jährlich eine bestimmte Summe auszuzahlen ist, so nennt man eine solche Versicherung: Rentenversicherung einzelner Leben, und wenn die in Aussicht gestellte jährliche Summe (die Leibrente) auf Lebenszeit und immer in derselben Höhe gewährt wird, eine einfache Rentenversicherung auf die Dauer eines einzelnen Lebens. Mit der Letzteren beschäftigt sich das nun unmittelbar Folgende näher.

Um jedoch bei den bezüglichlichen Berechnungen den Charakter der Allgemeinheit zu wahren, ferner der Kürze und Übersichtlichkeit der mathematischen Darstellung halber, sollen sowohl für die bekannt vorausgesetzten als auch für die unbekannten Zahlengrößen nur Buchstabenzeichen eingeführt werden, wonach die zunächst zu lösende Aufgabe lautet:

„Ein x -jähriger Mann bezieht am Anfange eines jeden Jahres (jährlich pränumerando) und auf Lebensdauer die Rente von a fl.; man suche

unter der Voraussetzung von $p\%$ jährlicher Zinsen und Zinseszinsen den gegenwärtigen Wert \mathfrak{M}_x dieser Leibrente.“

Gemäß Absterbeordnung für Männer stehen im Alter von x Jahren $\mathfrak{L}(x)$ Männer. Würden sich alle $\mathfrak{L}(x)$ Männer an der bezeichneten Versicherung beteiligen, so wären der Aufgabe zufolge sofort, d. h. gleich beim Beginne der Versicherung $a \cdot \mathfrak{L}(x)$ fl. auszahlbar, während am Anfange eines jeden folgenden Versicherungsjahres immer soviele Renten von a fl. fällig würden, als Männer von der ursprünglichen Anzahl $\mathfrak{L}(x)$ nach Ablauf genannter Termine noch leben. Die Absterbeordnung zeigt, dass bis zum Ende der Mortalitätstafel oder nach 1, 2, 3, ... m , ... Jahren von $\mathfrak{L}(x)$ sich noch $\mathfrak{L}(x+1)$, $\mathfrak{L}(x+2)$, $\mathfrak{L}(x+3)$, ... $\mathfrak{L}(x+m)$, ... Männer am Leben befinden, weshalb nach 1, 2, 3, ... m , ... Jahren der Reihe nach die Beträge von: $a \cdot \mathfrak{L}(x+1)$, $a \cdot \mathfrak{L}(x+2)$, $a \cdot \mathfrak{L}(x+3)$, ... $a \cdot \mathfrak{L}(x+m)$, ... fl. auszahlbar werden. Diese Capitalien besitzen je nach dem Fälligkeitstermine, und wenn man anstatt $1 + \frac{p}{100} = q$ setzt, die gegenwärtigen Werte von:

$$a \cdot \frac{\mathfrak{L}(x+1)}{q}, a \cdot \frac{\mathfrak{L}(x+2)}{q^2}, a \cdot \frac{\mathfrak{L}(x+3)}{q^3}, \dots a \cdot \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^m}, \dots \text{ fl.}$$

Wenn es sich daher um den Gesamtwert aller Rentenbezüge von a fl. oder um den Betrag handelt, welcher $\mathfrak{L}(x)$ Männern von x Jahren am Anfange eines jeden Jahres und auf Lebensdauer je eine jährliche Rente von a fl. sichert, so braucht man nur die Summe zu bilden:

$$a \cdot \left[\mathfrak{L}(x) + \frac{\mathfrak{L}(x+1)}{q} + \frac{\mathfrak{L}(x+2)}{q^2} + \frac{\mathfrak{L}(x+3)}{q^3} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^m} + \dots \right] \text{ fl.}$$

Hieraus ergibt sich aber sofort auch die Lösung der oben gestellten Aufgabe, denn jeder einzelne x -jährige Mann hat zum Zwecke der bezeichneten Versicherung einen Beitrag von:

$$\mathfrak{M}_x = a \cdot \frac{\mathfrak{L}(x) + \frac{\mathfrak{L}(x+1)}{q} + \frac{\mathfrak{L}(x+2)}{q^2} + \frac{\mathfrak{L}(x+3)}{q^3} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^m} + \dots}{\mathfrak{L}(x)} \text{ fl.}$$

zu leisten, oder \mathfrak{M}_x ist der gegenwärtige Wert der jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente von a fl. auf Lebensdauer für einen x -jährigen Mann.

Zum Zwecke tabellarischer Zusammenstellung gewisser Zahlengrößen, aus welchen sich die Werte \mathfrak{M}_x leicht berechnen lassen, unterwirft man die gefundene Gleichung noch mannigfachen Umformungen,

Zunächst dividirt man Zähler und Nenner des für \mathfrak{M}_x erhaltenen Bruches durch q^x , wodurch die betreffende Gleichung übergeht in:

$$\mathfrak{M}_x = a \cdot \frac{\frac{\mathfrak{L}(x)}{q^x} + \frac{\mathfrak{L}(x+1)}{q^{x+1}} + \frac{\mathfrak{L}(x+2)}{q^{x+2}} + \frac{\mathfrak{L}(x+3)}{q^{x+3}} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^{x+m}} + \dots}{\frac{\mathfrak{L}(x)}{q^x}},$$

ferner schreibt man kürzer anstatt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{L}(x)}{q^x} &= D_x, & \frac{\mathfrak{L}(x+1)}{q^{x+1}} &= D_{x+1}, & \frac{\mathfrak{L}(x+2)}{q^{x+2}} &= D_{x+2}, & \frac{\mathfrak{L}(x+3)}{q^{x+3}} &= D_{x+3}, \\ & & \dots & & \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^{x+m}} &= D_{x+m}, & \dots & \end{aligned}$$

und nennt $D_x, D_{x+1}, D_{x+2}, D_{x+3}, \dots, D_{x+m}, \dots$ die discountirten Zahlen der „lebenden Männer überhaupt“. Die Summe dieser discountirten Zahlen von einem beliebigen Alter x bis zum Ende der Mortalitätstafel drückt man durch:

$$\Sigma D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+m} + \dots$$

aus. Wenn der Wert von \mathfrak{M}_x für $a=1$ (Gulden, Mark, Franc, Rubel...) mit R_x bezeichnet wird, so repräsentirt die symbolische Formel:

$$R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$$

für ein beliebiges Alter x ganz allgemein den gegenwärtigen Wert der jährlich pränumerando und auf Lebensdauer zahlbaren Leibrente: 1 für Männer.

Im Anhang finden sich nun auf Tafel II, Colonne 6 diese Rentenwerte R_x und in den vorhergehenden Colonnen 5 und 4 die zur Auffindung derselben nothwendigen Zahlengrößen ΣD_x und D_x für alle gemäß Absterbeordnung (Col. 2) in Betracht kommenden Alter (Col. 1) und auf Grund eines 4%igen Zinsfußes berechnet vor, wonach beispielsweise für $x=45$ Jahre:

$$\begin{aligned} R_{45} &= \frac{\Sigma D_{45}}{D_{45}} = \frac{D_{45} + D_{46} + \dots + D_{93}}{D_{45}} = \\ &= \frac{13385.2 + 12686.4 + \dots + 0.495059}{13385.2} = \frac{189593.8}{13385.2} = 14.1644 \end{aligned}$$

ist. Wenn also einem 45-jährigen Manne jährlich pränumerando und auf Lebensdauer eine Leibrente von 1 fl. ö. W. ausgezahlt werden soll, so sind zur Bestreitung dieser Versicherung 14 fl. 16.5 kr. erforderlich.

Denselben Weg wie oben hat man einzuschlagen, wenn es sich um die Bestimmung der gegenwärtigen Werte jährlich pränumerando und auf Lebensdauer zahlbarer Leibrenten von 1 für Frauen oder Invalide handelt. Bei den bezüglichen Berechnungen ist naturgemäß anstatt der Sterblichkeitstafel für Männer im ersteren Falle jene der Frauen (siehe Taf. I, Col. 3 des Anhanges), im letzteren Falle jene der Invaliden in Anwendung zu bringen.

Erfüllen dem zufolge in der Absterbeordnung für Frauen gerade $L(y)$ das Alter von y Jahren, so kann man die discountirten Zahlen der lebenden Frauen der Analogie mit dem Vorigen halber, wie folgt, schreiben:

$$\frac{L(y)}{q^y} = D_y, \quad \frac{L(y+1)}{q^{y+1}} = D_{y+1}, \quad \frac{L(y+2)}{q^{y+2}} = D_{y+2}, \quad \frac{L(y+3)}{q^{y+3}} = D_{y+3},$$

$$\dots \dots \dots \frac{L(y+m)}{q^{y+m}} = D_{y+m}, \quad \dots \dots \dots$$

und deren Summe:

$$D_y + D_{y+1} + D_{y+2} + D_{y+3} + \dots + D_{y+m} + \dots = \Sigma D_y.$$

Hienach ergibt sich sofort die symbolische Form:

$$R_y = \frac{\Sigma D_y}{D_y},$$

worin R_y den gegenwärtigen Wert einer jährlich vorhinein und auf Lebensdauer zahlbaren Leibrente: 1 für Frauen ausdrückt.

Obwohl die diesbezüglichen Berechnungen auch anderweitig vorliegen, so wurden der Vollständigkeit wegen die zur Bestimmung von R_y nöthigen Zahlenwerte (siehe Taf. III, Col. 6 des Anhanges) in derselben Reihenfolge, wie es auf Tafel II für Männer geschah, angeführt, u. zw. unter Zugrundelegung eines 4⁰/₀ igen Zinsfußes und für jedes laut Absterbeordnung der lebenden Frauen (Col. 2) vorkommende Alter.

Bedeutet weiters $\mathcal{L}^i(x)$ jene Anzahl Invaliden, welche in der sie betreffenden Absterbeordnung (siehe §. 2) sämtlich dem Alter x angehören, so wird man in den nachfolgenden Entwicklungen die discountirten Zahlen der lebenden Invaliden kürzer durch:

$$\frac{\mathcal{L}^i(x)}{q^x} = D_x^i, \quad \frac{\mathcal{L}^i(x+1)}{q^{x+1}} = D_{x+1}^i, \quad \frac{\mathcal{L}^i(x+2)}{q^{x+2}} = D_{x+2}^i, \quad \frac{\mathcal{L}^i(x+3)}{q^{x+3}} = D_{x+3}^i, \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \frac{\mathcal{L}^i(x+m)}{q^{x+m}} = D_{x+m}^i, \quad \dots \dots \dots$$

und die Summe derselben in ähnlicher Weise wie oben ausdrücken:

$$D_x^i + D_{x+1}^i + D_{x+2}^i + D_{x+3}^i + \dots + D_{x+m}^i + \dots = \Sigma D_x^i.$$

Die Gleichung:

$$R_x^i = \frac{\sum D_x^i}{D_x^i}$$

stellt nun den gegenwärtigen Wert R_x^i einer jährlich vorhinein und auf Lebensdauer zahlbaren Leibrente: 1 für Invalide vor.

In dem „Berichte“ wurden auf Tabelle III diese Rentenwerte und die zur Auffindung derselben verwendeten Hilfszahlen für alle in der Absterbeordnung der Invaliden enthaltenen Alter x und auf Grund desselben Zinsfußes wie oben bereits veröffentlicht.

Was die für die bezeichneten Leibrentenwerte der „Männer überhaupt“, der Frauen und der Invaliden gefundenen mathematischen Ausdrücke und die nach denselben berechneten Zahlenwerte insgesamt anbelangt, so behalten diese natürlich nur solange ihre Giltigkeit, als die gemachten Voraussetzungen bestehen bleiben. Tritt hierin jedoch eine Änderung ein, so fragt es sich, ob eine Neuberechnung der Leibrentenwerte, möglicherweise mit Benützung der bereits vorliegenden, stattfinden muss, oder ob der geänderten Annahme anderweitig, etwa durch eine leicht durchführbare aber sachgemäße Correction der vorhandenen Werte entsprochen werden kann.

Welche Wahl nun zu treffen ist, wenn die Auszahlung der oben erwähnten Leibrenten nicht jährlich, sondern halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich vorhinein und demgemäß in 2, 4 oder auch in 12 gleichen Pränumerandoraten des jährlichen Ausmaßes erfolgt, werden dienachstehenden Betrachtungen zeigen. Es wird nur noch bemerkt, dass jene Überlegungen, welche sich auf die Annahme einer monatlichen Ratenzahlung der Leibrenten beziehen, deshalb vollständig durchgeführt werden sollen, weil dieselben für die Zwecke der vorliegenden Schrift von besonderem Interesse sind und überdies auch den allgemeineren Fall repräsentiren, auf welchen bezüglich aller übrigen Fälle wegen der Analogie derselben verwiesen werden kann.

Den allgemeinen Voraussetzungen zufolge gruppiren sich bekanntlich die Lebenden irgend einer gemäß §. 2 in Betracht kommenden Absterbeordnung nach vollen Altersjahren, d. h. jede ausgewiesene Zahl der Lebenden entspricht einem gerade (am Anfange des Versicherungsjahres) erreichten, in ganzen Zahlen ausgedrückten Alter. Hienach finden sich z. B. in der Absterbeordnung für „Männer überhaupt“, wenn x irgend eine ganze Zahl bedeutet, im Alter von x Jahren $\mathcal{Q}(x)$ Männer vor, und da hievon im Laufe eines Jahres eine gewisse Anzahl stirbt, erfüllen das Alter von $x+1$ Jahren nur noch $\mathcal{Q}(x+1)$ Männer. Denkt man sich die jetzt angebbare Zahl der im Laufe des Jahres tafelmäßig vorgekommenen Todesfälle:

$\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)$ auf das Zeitintervall des verflossenen Jahres gleichmäßig verteilt, so entfallen auf einen Monat: $\frac{\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)}{12}$ Männer.

Und nunmehr behandeln wir die Aufgabe:

„Ein x -jähriger Mann bezieht auf Lebensdauer und in gleich hohen, monatlich vorhinein zahlbaren Raten eine Rente vom jährlichen Ausmaße: 1 (Gulden, Mark, Franc, Rubel,); wie groß ist der gegenwärtige Wert: $\frac{1}{12}R_x$ dieser Leibrente bei $p\%$ jährlicher Zinsen und Zinseszinsen.“

Wenn $\mathfrak{L}(x)$ Männer vom Alter x die hierbezeichnete Versicherung eingingen, so wäre an dieselben der Aufgabe gemäß sofort beim Eintritt je $\frac{1}{12}$ und zusammen der Betrag: $\frac{1}{12} \cdot \mathfrak{L}(x)$ auszusahlen, während zu Beginn des zweiten Monats nur so viele Raten fällig würden, als Männer zu dieser Zeit noch am Leben sind. Nach früheren Betrachtungen ergibt sich diese Anzahl ohneweiters, denn von $\mathfrak{L}(x)$ Männern sterben im Laufe eines Jahres pro Monat: $\frac{\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)}{12}$, folglich leben zu Beginn des zweiten Monats noch:

$$\mathfrak{L}(x) - \frac{\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)}{12} = \frac{11\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(x+1)}{12}$$

Männer, und der an diesem Termine fällige Betrag lautet:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{11\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(x+1)}{12}.$$

Da weiter zu Beginn des dritten Monats noch:

$$\mathfrak{L}(x) - 2 \frac{\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)}{12} = \frac{10\mathfrak{L}(x) + 2\mathfrak{L}(x+1)}{12},$$

bei Beginn des vierten Monats:

$$\mathfrak{L}(x) - 3 \frac{\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)}{12} = \frac{9\mathfrak{L}(x) + 3\mathfrak{L}(x+1)}{12},$$

endlich zu Beginn des zwölften Monats:

$$\mathfrak{L}(x) - 11 \frac{\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)}{12} = \frac{\mathfrak{L}(x) + 11\mathfrak{L}(x+1)}{12}$$

Männer leben, so werden dem entsprechend die terminlichen Zahlungen im Betrage von:

Bruderladen,

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{10 \mathfrak{L}(x) + 2 \mathfrak{L}(x+1)}{12},$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{9 \mathfrak{L}(x) + 3 \mathfrak{L}(x+1)}{12}$$

und schließlich von:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{\mathfrak{L}(x) + 11 \mathfrak{L}(x+1)}{12}$$

erfolgen müssen.

Um aber die Werte dieser monatlichen Ratenzahlungen des ersten Versicherungsjahres für den Beginn desselben zu bestimmen, überlege man, dass bei einer jährlich $p\%$ igen Verzinsung die monatlichen Zinsen zu $\frac{p}{12}\%$, und wenn innerhalb eines Jahres einfache Zinsen gelten,

die zweimonatlichen Zinsen zu $\frac{2p}{12}\%$,

die dreimonatlichen Zinsen zu $\frac{3p}{12}\%$,

endlich die elfmonatlichen Zinsen zu $\frac{11p}{12}\%$

gerechnet werden können. Bei einer jährlichen Verzinsung war der Abzinsungsfactor: $q = \frac{100+p}{100}$; dem zufolge entspricht einer einmonatlichen Verzinsung der Abzinsungsfactor:

$$q_{\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{100 + \frac{p}{12}}{100} = \frac{1200 + p}{1200} = \frac{11}{12} + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right) = \frac{11+q}{12},$$

einer zweimonatlichen Verzinsung der Abzinsungsfactor:

$$q_{\left(\frac{2}{12}\right)} = \frac{100 + \frac{2p}{12}}{100} = \frac{1200 + 2p}{1200} = \frac{10}{12} + \frac{2}{12} \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right) = \frac{10+2q}{12}.$$

Nach der Analogie erhält man für eine dreimonatliche Verzinsung:

$$q_{\left(\frac{3}{12}\right)} = \frac{9+3q}{12},$$

schließlich für eine elfmonatliche:

$$q_{\left(\frac{11}{12}\right)} = \frac{1+11q}{12}.$$

Hiermit ergeben sich sofort die oben verlangten Werte, u. zw. für die erste Ratenzahlung:

$$\frac{1}{12} \cdot \mathfrak{L}(x) = \frac{1}{12} \cdot \mathfrak{L}(x),$$

für die zweite Ratenzahlung:

$$\frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{11\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(x+1)}{12}}{q\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{11\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(x+1)}{11+q},$$

für die dritte Ratenzahlung:

$$\frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{10\mathfrak{L}(x) + 2\mathfrak{L}(x+1)}{12}}{q\left(\frac{2}{12}\right)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{10\mathfrak{L}(x) + 2\mathfrak{L}(x+1)}{10+2q},$$

für die vierte Ratenzahlung:

$$\frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{9\mathfrak{L}(x) + 3\mathfrak{L}(x+1)}{12}}{q\left(\frac{3}{12}\right)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{9\mathfrak{L}(x) + 3\mathfrak{L}(x+1)}{9+3q},$$

endlich für die zwölfte Ratenzahlung:

$$\frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{\mathfrak{L}(x) + 11\mathfrak{L}(x+1)}{12}}{q\left(\frac{11}{12}\right)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\mathfrak{L}(x) + 11\mathfrak{L}(x+1)}{1+11q}.$$

Alle zwölf Monatsraten des ersten Versicherungsjahres haben zu Beginn desselben den Wert:

$$\Gamma_{x_1} = \frac{1}{12} \cdot \left[\mathfrak{L}(x) + \frac{11\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(x+1)}{11+q} + \frac{10\mathfrak{L}(x) + 2\mathfrak{L}(x+1)}{10+2q} + \frac{9\mathfrak{L}(x) + 3\mathfrak{L}(x+1)}{9+3q} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x) + 11\mathfrak{L}(x+1)}{1+11q} \right].$$

In derselben Weise wie für das erste Versicherungsjahr lassen sich für die folgenden Jahre bis zum Ableben aller nach der Annahme ursprünglich vorhandenen Männer $\mathfrak{L}(x)$, d. h. bis zum Ende der Absterbeordnung die bezüglichen Werte: Γ_x ableiten. Wir bezeichnen dieselben der Reihe nach mit:

2*

$\Gamma_{x_2}, \Gamma_{x_3}, \dots, \Gamma_{x_m}, \dots$ für das zweite, dritte, \dots m^{te} Versicherungsjahr u. s. f. und immer auf den Beginn des betreffenden Jahres bezogen. Man beachte nun, dass, während im Laufe des ersten Versicherungsjahres von $\mathfrak{L}(x)$ versicherten Männern: $\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)$ starben,

im Laufe des zweiten Jahres $\mathfrak{L}(x+1) - \mathfrak{L}(x+2)$,

im Laufe des dritten Jahres $\mathfrak{L}(x+2) - \mathfrak{L}(x+3)$,

im Laufe des m^{ten} Jahres $\mathfrak{L}(x+m-1) - \mathfrak{L}(x+m)$

Todesfälle u. s. f. bis zum Ende der Absterbeordnung tafelmäßig in Betracht kommen, dass sonach unter Beibehalt der früheren Annahme über die gleichmäßige Vertheilung der Todesfälle über das Zeitintervall eines Jahres:

im Laufe des zweiten Jahres monatlich $\frac{\mathfrak{L}(x+1) - \mathfrak{L}(x+2)}{12}$,

im Laufe des dritten Jahres monatlich $\frac{\mathfrak{L}(x+2) - \mathfrak{L}(x+3)}{12}$,

allgemein im Laufe des m^{ten} Jahres monatlich $\frac{\mathfrak{L}(x+m-1) - \mathfrak{L}(x+m)}{12}$

Männer u. s. f. sterben. Mit Hilfe dieser Vertheilung der Sterbefälle könnte man wie oben die verschiedenen monatlichen Ratenzahlungen und deren Werte, endlich den Gesamtwert aller zwölf Monatsraten irgend eines Versicherungsjahres und für den Beginn desselben berechnen. Es würde sich dann zeigen, dass sich die Ausdrücke für $\Gamma_{x_2}, \Gamma_{x_3}, \dots, \Gamma_{x_m}, \dots$ von Γ_{x_1} nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von $\mathfrak{L}(x)$ und $\mathfrak{L}(x+1)$ der Reihe nach die Decrementenpaare: $\mathfrak{L}(x+1)$ und $\mathfrak{L}(x+2)$, $\mathfrak{L}(x+2)$ und $\mathfrak{L}(x+3)$, allgemein $\mathfrak{L}(x+m-1)$ und $\mathfrak{L}(x+m)$ auftreten. Sonach bestehen die Relationen:

$$\Gamma_{x_2} = \frac{1}{12} \cdot \left[\mathfrak{L}(x+1) + \frac{11\mathfrak{L}(x+1) + \mathfrak{L}(x+2)}{11+q} + \frac{10\mathfrak{L}(x+1) + 2\mathfrak{L}(x+2)}{10+2q} + \frac{9\mathfrak{L}(x+1) + 3\mathfrak{L}(x+2)}{9+3q} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x+1) + 11\mathfrak{L}(x+2)}{1+11q} \right],$$

$$\Gamma_{x_3} = \frac{1}{12} \cdot \left[\mathfrak{L}(x+2) + \frac{11\mathfrak{L}(x+2) + \mathfrak{L}(x+3)}{11+q} + \frac{10\mathfrak{L}(x+2) + 2\mathfrak{L}(x+3)}{10+2q} + \frac{9\mathfrak{L}(x+2) + 3\mathfrak{L}(x+3)}{9+3q} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x+2) + 11\mathfrak{L}(x+3)}{1+11q} \right]$$

und allgemein:

$$\Gamma_{x_m} = \frac{1}{12} \left[\mathfrak{L}(x+m-1) + \frac{11\mathfrak{L}(x+m-1) + \mathfrak{L}(x+m)}{11+q} + \right. \\ \left. + \frac{10\mathfrak{L}(x+m-1) + 2\mathfrak{L}(x+m)}{10+2q} + \frac{9\mathfrak{L}(x+m-1) + 3\mathfrak{L}(x+m)}{9+3q} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\mathfrak{L}(x+m-1) + 11\mathfrak{L}(x+m)}{1+11q} \right]$$

u. s. f. bis zum Ende der Absterbeordnung.

Werden die Größen $\Gamma_{x_1}, \Gamma_{x_2}, \Gamma_{x_3}, \dots, \Gamma_{x_m}, \dots$ sämtlich auf den Beginn des ersten Versicherungsjahres bezogen, so haben dieselben bei Berechnung jährlicher Zinseszinsen bekanntlich die sogenannten gegenwärtigen

Werte: $\Gamma_{x_1}, \frac{\Gamma_{x_2}}{q}, \frac{\Gamma_{x_3}}{q^2}, \dots, \frac{\Gamma_{x_m}}{q^{m-1}}, \dots$. Die Summe:

$$\Gamma_{x_1} + \frac{\Gamma_{x_2}}{q} + \frac{\Gamma_{x_3}}{q^2} + \dots + \frac{\Gamma_{x_m}}{q^{m-1}} + \dots$$

bedeutet dann den gegenwärtigen Wert einer von $\mathfrak{L}(x)$ Männern des Alters x auf Lebensdauer abgeschlossenen Versicherung, welche jedem x -jährigen Manne eine in gleich hohen monatlichen Pränumerandoraten auszahlbare Leibrente vom jährlichen Ausmaße: 1 in Aussicht stellt. Zur Realisirung einer solchen Versicherung hat demnach jeder x -jährige Mann beim Eintritt in dieselbe:

$$\frac{{}_{12}R_x}{12} = \frac{\Gamma_{x_1} + \frac{\Gamma_{x_2}}{q} + \frac{\Gamma_{x_3}}{q^2} + \dots + \frac{\Gamma_{x_m}}{q^{m-1}} + \dots}{\mathfrak{L}(x)}$$

beizutragen, und wäre hiemit die gestellte Aufgabe formell gelöst, denn $\frac{{}_{12}R_x}{12}$ ist der gesuchte gegenwärtige Wert einer auf Lebensdauer und in der Höhe von $\frac{1}{12}$ monatlich vorhinein zahlbaren Leibrente für einen x -jährigen Mann.

Um jedoch die eigentliche Bedeutung dieses Ausdruckes kennen zu lernen, müssen die als bekannt vorauszusetzenden Größen substituiert werden, und dies soll im Folgenden geschehen. Dividirt man Zähler und Nenner von $\frac{{}_{12}R_x}{12}$ durch q^x , so ergibt sich zunächst:

$$\frac{{}_{12}R_x}{12} = \frac{\frac{\Gamma_{x_1}}{q^x} + \frac{\Gamma_{x_2}}{q^{x+1}} + \frac{\Gamma_{x_3}}{q^{x+2}} + \dots + \frac{\Gamma_{x_m}}{q^{x+m-1}} + \dots}{\frac{\mathfrak{L}(x)}{q^x}}$$

Da bekanntlich $\frac{\mathfrak{L}(x)}{q^x} = D_x$ ist, und man der Einfachheit halber schreiben kann:

$$\frac{\Gamma_{x_1}}{q^x} = \Delta_{x_1}, \frac{\Gamma_{x_2}}{q^{x+1}} = \Delta_{x_2}, \frac{\Gamma_{x_3}}{q^{x+2}} = \Delta_{x_3}, \dots, \frac{\Gamma_{x_m}}{q^{x+m-1}} = \Delta_{x_m}, \dots,$$

so erhält man für $\frac{12}{12}R_x$, wenn

$$\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \Delta_{x_3} + \dots + \Delta_{x_m} + \dots = \Sigma \Delta_x$$

gesetzt wird, auch die symbolische Form:

$$\frac{12}{12}R_x = \frac{\Sigma \Delta_x}{D_x}.$$

Ohne besondere Schwierigkeiten findet man weiters durch Einführung der discontirten Zahlen der „lebenden Männer überhaupt“ die Relationen:

$$\Delta_{x_1} = \frac{1}{12} \left[D_x + \frac{11D_x + q.D_{x+1}}{11+q} + \frac{10D_x + 2q.D_{x+1}}{10+2q} + \frac{9D_x + 3q.D_{x+1}}{9+3q} + \dots + \frac{D_x + 11q.D_{x+1}}{1+11q} \right],$$

$$\Delta_{x_2} = \frac{1}{12} \left[D_{x+1} + \frac{11D_{x+1} + q.D_{x+2}}{11+q} + \frac{10D_{x+1} + 2q.D_{x+2}}{10+2q} + \frac{9D_{x+1} + 3q.D_{x+2}}{9+3q} + \dots + \frac{D_{x+1} + 11q.D_{x+2}}{1+11q} \right],$$

$$\Delta_{x_3} = \frac{1}{12} \left[D_{x+2} + \frac{11D_{x+2} + q.D_{x+3}}{11+q} + \frac{10D_{x+2} + 2q.D_{x+3}}{10+2q} + \frac{9D_{x+2} + 3q.D_{x+3}}{9+3q} + \dots + \frac{D_{x+2} + 11q.D_{x+3}}{1+11q} \right],$$

allgemein:

$$\Delta_{x_m} = \frac{1}{12} \left[D_{x+m-1} + \frac{11D_{x+m-1} + q.D_{x+m}}{11+q} + \frac{10D_{x+m-1} + 2q.D_{x+m}}{10+2q} + \frac{9D_{x+m-1} + 3q.D_{x+m}}{9+3q} + \dots + \frac{D_{x+m-1} + 11q.D_{x+m}}{1+11q} \right]$$

u. s. f., schließlich die Beziehung:

$$\Sigma \Delta_x = \frac{1}{12} \left[\Sigma D_x + \frac{11\Sigma D_x + q.\Sigma D_{x+1}}{11+q} + \frac{10\Sigma D_x + 2q.\Sigma D_{x+1}}{10+2q} + \frac{9\Sigma D_x + 3q.\Sigma D_{x+1}}{9+3q} + \dots + \frac{\Sigma D_x + 11q.\Sigma D_{x+1}}{1+11q} \right].$$

Bedenkt man aber, dass früheren Entwicklungen zufolge:

$$\frac{\Sigma D_x}{D_x} = R_x = 1 + \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}, \text{ also } \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} = R_x - 1$$

ist, so resultirt:

$$\begin{aligned} {}_{12}R_x &= \frac{1}{12} \left[R_x + \frac{11R_x + q(R_x - 1)}{11 + q} + \frac{10R_x + 2q(R_x - 1)}{10 + 2q} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9R_x + 3q(R_x - 1)}{9 + 3q} + \dots + \frac{R_x + 11q(R_x - 1)}{1 + 11q} \right], \\ &= \frac{1}{12} \left[R_x + \frac{R_x(11 + q) - q}{11 + q} + \frac{R_x(10 + 2q) - 2q}{10 + 2q} + \frac{R_x(9 + 3q) - 3q}{9 + 3q} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{R_x(1 + 11q) - 11q}{1 + 11q} \right], \\ &= \frac{1}{12} \left[12R_x - \frac{q}{11 + q} - \frac{2q}{10 + 2q} - \frac{3q}{9 + 3q} - \dots - \frac{11q}{1 + 11q} \right] \end{aligned}$$

und hieraus die Endformel:

$${}_{12}R_x = R_x - \frac{q}{12} \left[\frac{1}{11 + q} + \frac{2}{10 + 2q} + \frac{3}{9 + 3q} + \dots + \frac{11}{1 + 11q} \right].$$

Da den gemachten Voraussetzungen gemäß: $q = \frac{100 + p}{100}$ und p eine bekannte Größe ist, so ergibt sich, dass im vorstehenden Ausdrucke das Glied:

$$\frac{q}{12} \left[\frac{11}{1 + 11q} + \dots + \frac{3}{9 + 3q} + \frac{2}{10 + 2q} + \frac{1}{11 + q} \right] = \delta.$$

eine Constante vorstellt, die für jedes in Betracht kommende Mannesalter x ein und denselben Wert besitzt. Die Größe δ hat aber eine noch viel allgemeinere Bedeutung, denn, wie man sieht, ist dieselbe von den Zahlen der Lebenden, sonach von der bezüglichen Absterbeordnung unabhängig. Daraus folgt, dass, wenn man nach denselben Grundsätzen wie oben den gegenwärtigen Wert einer auf Lebensdauer und in gleichen Raten monatlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 für Frauen oder denjenigen für Invalide, d. h. ${}_{12}R_y$ oder ${}_{12}R'_x$ ableiten wollte, sich zeigen müsste, dass die obige Form und bei demselben Zinsfuße auch der betreffende Zahlenwert für δ unverändert in Anwendung bleibt. Man sagt daher allgemein: „Den gegenwärtigen Wert

einer auf Lebensdauer und in gleichen Raten monatlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 findet man, indem man einfach vom gegenwärtigen Werte der auf Lebensdauer aber jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 die Constante δ abzieht.“

Ähnliche Regeln lassen sich aufstellen, wenn die Leibrenten: 1 nicht monatlich, sondern halb-, vierteljährlich oder allgemein in n gleichen Pränumerandoraten ausgezahlt werden sollen. Wie leicht zu errathen ist, gilt bei der Berechnung der diesbezüglichen Leibrentenwerte dasselbe Verfahren, wie für die monatliche Ratenzahlung, aber die Correctionsgröße $\frac{n}{n}\delta$ ist für jeden Fall besonders zu bestimmen, und zwar erkennt man aus dem obigen Ausdrücke das Bildungsgesetz:

$$\frac{n}{n}\delta = \frac{q}{n} \left[\frac{n-1}{1+(n-1)q} + \frac{n-2}{2+(n-2)q} + \frac{n-3}{3+(n-3)q} + \dots \right].$$

In der Praxis hat man es außer mit jährlich, halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich vorhinein zahlbaren auch mit nachhinein auszahlbaren Leibrenten zu thun. Man gelangt ohne weiters zu den Formeln für die Werte der letzteren, wenn man beachtet, dass aus der vorhinein zahlbaren, eine nachhinein zahlbare Rente entsteht, sobald man von der ersten Pränumerandorente oder auch von der ersten Pränumerandorate beim Eintritt in die Versicherung absieht. Bezeichnet man daher beispielsweise mit R'_x den gegenwärtigen Wert einer auf Lebensdauer eines x -jährigen Mannes und jährlich nachhinein zahlbaren Leibrente: 1 und mit $\frac{12}{12}R'_x$ den gegenwärtigen Wert einer auf Lebensdauer eines x -jährigen Mannes aber in gleich hohen Monatsraten und nachhinein zahlbaren Leibrente von jährlich 1, so ist:

$$R'_x = R_x - 1,$$

und analog:

$$\frac{12}{12}R'_x = \frac{12}{12}R_x - \frac{1}{12},$$

welch' letztere Gleichung, wenn man den oben erhaltenen Wert für $\frac{12}{12}R_x$ substituirt, übergeht in:

$$\frac{12}{12}R'_x = R_x - \left(\delta + \frac{1}{12} \right).$$

Wie bekannt, liegt nun den früher näher bezeichneten Wertberechnungen ein 4%iger Zinsfuß zu Grunde. Da in diesem Falle $q = 1.04$ ist, so ergibt sich zunächst als Correctionsgröße:

$$\delta = \frac{1.04}{12} \left[\frac{11}{12.44} + \dots + \frac{3}{12.12} + \frac{2}{12.08} + \frac{1}{12.04} \right] =$$

$$= \frac{5.5779}{12} = 0.464825,$$

und wenn man sich mit drei Decimalstellen begnügt, schließlich:

$$\left. \begin{aligned} {}_{12}R_x &= R_x - 0.465, \\ {}_{12}R'_x &= R_x - 0.548. \end{aligned} \right\}$$

Ebenso wichtig wie die Besprechung der Leibrenten mit Ratenzahlung ist für die vorliegende Schrift die Berechnung der Werte aufgeschobener Leibrenten und die Bestimmung der Werte aufhörender Leibrenten.

Wenn nämlich Leibrenten erst nach m Jahren zu laufen beginnen, insoferne natürlich dieser Zeitpunkt von den so versicherten Personen erlebt wird, so nennt man dieselben aufgeschobene Leibrenten. Es soll nun der Wert einer solchen um m Jahre aufgeschobenen und von da an auf Lebensdauer jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 berechnet werden, und zwar unter Zugrundelegung irgend einer Absterbeordnung und für ein beliebiges Alter.

Nehmen wir beispielsweise wieder an, dass $\mathfrak{L}(x)$ Männer des Alters x die beschriebenen Renten zu beziehen haben, so findet die erste Rentenzahlung mit Erreichung des Alters von $x+m$ Jahren statt. Bedenkt man ferner, dass von $\mathfrak{L}(x)$ Männern nach Ablauf von m Jahren noch $\mathfrak{L}(x+m)$ leben, so sind zu dieser Zeit $\mathfrak{L}(x+m)$ Renten von 1 fällig, und es ergibt sich als Wert dieser Zahlung zu Beginn der Versicherung: $\frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^m}$, wo q den bekannten Abzinsungsfactor vorstellt. Da nach $m+1$, $m+2$, $m+3$, ... Jahren u. s. f. bis zum Ende der Absterbeordnung noch $\mathfrak{L}(x+m+1)$, $\mathfrak{L}(x+m+2)$, $\mathfrak{L}(x+m+3)$, ... Männer leben, so werden der Reihe nach die Beträge: $\mathfrak{L}(x+m+1)$, $\mathfrak{L}(x+m+2)$, $\mathfrak{L}(x+m+3)$, ... u. s. f. fällig, und die gegenwärtigen, d. h. die auf den Beginn der Versicherung bezogenen Werte jener Zahlungen lauten:

$$\frac{\mathfrak{L}(x+m+1)}{q^{m+1}}, \frac{\mathfrak{L}(x+m+2)}{q^{m+2}}, \frac{\mathfrak{L}(x+m+3)}{q^{m+3}}, \dots \text{ u. s. f.}$$

bis zum Ende der Tafel. Wenn nun die Summe der gegenwärtigen Werte aller auszahlbaren Renten von 1, also der Gesamtwert:

$$\frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^m} + \frac{\mathfrak{L}(x+m+1)}{q^{m+1}} + \frac{\mathfrak{L}(x+m+2)}{q^{m+2}} + \frac{\mathfrak{L}(x+m+3)}{q^{m+3}} + \dots$$

auf $\mathfrak{L}(x)$ Männer gleichmäßig vertheilt wird, so erhält man mR_x , den gegenwärtigen Wert einer um m Jahre aufgeschobenen und dann auf Lebensdauer jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 für einen x -jährigen Mann, und zwar:

$${}^mR_x = \frac{\frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^m} + \frac{\mathfrak{L}(x+m+1)}{q^{m+1}} + \frac{\mathfrak{L}(x+m+2)}{q^{m+2}} + \frac{\mathfrak{L}(x+m+3)}{q^{m+3}} + \dots}{\mathfrak{L}(x)}$$

Dividirt man Zähler und Nenner dieser Gleichung wieder durch q^x , so wird unter Verwendung der für die discountirten Zahlen der „lebenden Männer überhaupt“ eingeführten Buchstabenzeichen:

$$\begin{aligned} {}^mR_x &= \frac{D_{x+m} + D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + D_{x+m+3} + \dots}{D_x} \\ &= \frac{\Sigma D_{x+m}}{D_x} = \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \frac{\Sigma D_{x+m}}{D_{x+m}} \end{aligned}$$

Nun ist aber $\frac{\Sigma D_{x+m}}{D_{x+m}}$, wie bekannt, nichts anderes als der Wert der auf Lebensdauer und jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 für einen $(x+m)$ -jährigen Mann; man kann daher auch schreiben:

$${}^mR_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot R_{x+m}$$

Wenn eine Rente zwar sogleich beginnt, aber nach Ablauf von m Jahren, wenn die derart versicherte Person dann noch am Leben ist, nicht mehr auszuzahlen ist, hat man es mit sogenannten aufhörenden oder temporären Leibrenten zu thun.

Um den gegenwärtigen Wert einer solchen jährlich vorhinein zahlbaren und nach m Jahren aufhörenden Leibrente: 1 zu berechnen, überlege man, dass die Rentenzahlungen in diesem Falle gerade für jenen abgegrenzten Zeitraum stattfinden, für welchen nach der vorigen Aufgabe über aufgeschobene Renten die Auszahlung der Leibrente: 1 entfiel. Es ist daher erklärlich, dass die neue Aufgabe ohne weiters gelöst wird, wenn man die Differenz zwischen dem Werte der sofort beginnenden und auf Lebensdauer jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 und dem Werte der um m Jahre aufgeschobenen und von da an bis zum Lebensende jährlich pränumerando zahlbaren Leibrente: 1 bildet. Bezeichnet man also

z. B. mit ${}^m\mathfrak{R}_x$ den gegenwärtigen Wert einer jährlich vorhinein zahlbaren und nach m Jahren aufhörenden Leibrente: 1 für einen x -jährigen Mann, so wird:

$${}^m\mathfrak{R}_x = R_x - {}^mR_x = R_x - \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot R_{x+m},$$

oder, wenn die für R_x und R_{x+m} gefundenen Ausdrücke substituirt werden:

$${}^m\mathfrak{R}_x = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+m}}{D_x}.$$

Ein specieller Fall temporärer Leibrenten ist nun derjenige, in welchem der Rentenbezug für jedes beliebige Alter nicht immer gerade m Jahre, sondern allgemein bis zur Vollendung eines bestimmten Alters dauert. Wird daher die Leibrente: 1 bis inclusive zum r^{ten} Lebensjahre geleistet, so sind alle $(r+1)$ -jährigen und älteren Personen vom Genusse der Rente ausgeschlossen. Im bezeichneten Falle wird naturgemäß x immer $<$ als $r+1$ sein, wodurch sich für m , d. h. für die in Jahren ausgedrückte Dauer der Rentenzahlungen die Relation ergibt:

$$m = (r+1) - x = r - x + 1.$$

Bedeutet also im genannten Falle $(r-x+1)R_x$ den gegenwärtigen Wert einer bis zum $r+1^{\text{ten}}$ Lebensjahre oder einer um $r-x+1$ Jahre aufgeschobenen und dann auf Lebensdauer jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 für einen x -jährigen Mann, so ist:

$${}^{(r-x+1)}\mathfrak{R}_x = \frac{\Sigma D_{r+1}}{D_x},$$

und ΣD_{r+1} eine für alle Alter x constante GröÙe. Man erhält sonach als gegenwärtigen Wert einer bis inclusive zum r^{ten} Lebensjahre dieses x -jährigen Mannes jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1, d. h. im vorliegenden Fall, als baaren Wert einer nach $r-x+1$ Jahren aufhörenden Rente:

$${}^{(r-x+1)}\mathfrak{R}_x = R_x - {}^{(r-x+1)}R_x.$$

Drückt man diese Gleichung durch die discountirten Zahlen der lebenden Männer aus, so ergibt sich:

$${}^{(r-x+1)}\mathfrak{R}_x = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{r+1}}{D_x},$$

und wenn nur die Leibrentenwerte R_x für Männer bekannt wären, wird man, da:

$${}^{(r-x+1)}R_x = \frac{D_{r+1}}{D_x} \cdot \frac{\Sigma D_{r+1}}{D_{r+1}} = \frac{D_{r+1}}{D_x} \cdot R_{r+1}$$

ist, auch die Formel:

$${}^{(r-x+1)}R_x = R_x - \frac{D_{r+1}}{D_x} \cdot R_{r+1}$$

anwenden können.

Angenommen die Werte ${}^{(r-x+1)}R_x$ liegen nach irgend einer der entwickelten Formeln berechnet vor, so erübrigt noch, das Verfahren anzugeben, in welcher Weise dieselben zu verwenden sind, wenn die temporären Renten: 1 nicht jährlich vorhinein sondern in gleich hohen monatlichen Raten und nachhinein ausgezahlt werden. Wenn man zu diesem Zwecke in der Formel:

$${}^{(r-x+1)}R_x = R_x - \frac{D_{r+1}}{D_x} \cdot R_{r+1}$$

zunächst die Leibrentenwerte R_x und R_{r+1} in solche verwandelt, für welche die Rentenzahlung in gleichen monatlichen Raten und nachhinein stattfindet, so hat man nach bekannten Grundsätzen unter Voraussetzung einer 4 $\frac{1}{2}$ %igen Verzinsung zu substituieren:

$$\frac{{}_{12}R'_x}{12} = R_x - 0.548, \quad \frac{{}_{12}R'_{r+1}}{12} = R_{r+1} - 0.548,$$

und es resultirt als Wert $\frac{{}^{(r-x+1)}{}_{12}R'_x}{12}$ einer bis inclusive zum r^{ten} Lebensjahre in gleichen Raten monatlich nachhinein zahlbaren Leibrente vom jährlichen Ausmaße: 1 für einen x -jährigen Mann:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{(r-x+1)}{}_{12}R'_x}{12} &= R_x - 0.548 - \frac{D_{r+1}}{D_x} \cdot (R_{r+1} - 0.548) \\ &= R_x - \frac{D_{r+1}}{D_x} \cdot R_{r+1} - 0.548 \cdot \left(1 - \frac{D_{r+1}}{D_x}\right). \end{aligned}$$

Setzt man hierin kürzer:

$$R_x - \frac{D_{r+1}}{D_x} \cdot R_{r+1} = {}^{(r-x+1)}R_x,$$

so besteht die Gleichung:

$$\frac{{}^{(r-x+1)}{}_{12}R'_x}{12} = {}^{(r-x+1)}R_x - 0.548 \left(1 - \frac{D_{r+1}}{D_x}\right).$$

Es wurde schon früher erwähnt, dass ganz dieselben mathematischen Untersuchungen anzustellen sind, wenn es sich nicht um „Männer über-

haupt“, sondern um Frauen oder auch um die Zugrundelegung einer Absterbeordnung handelt, in welcher das Geschlecht der Lebenden nicht unterschieden ist. Man wird also zu den bezüglichen Endformeln für temporäre Rentenzahlungen sofort gelangen, wenn man in den erhaltenen Ausdrücken einfach die auf eine andere Absterbeordnung sich beziehenden Buchstabengrößen einführt, im Übrigen aber die Form der Ausdrücke beibehält. In diesem Sinne wurden nun die oben entwickelten Formeln benützt, um für alle bei Versorgung von Kindern in Betracht kommenden Alter die gegenwärtigen Werte von Leibrenten: 1 zu berechnen, welche nach dem vollendeten 12., 13., 14., 16. und 18. Lebensjahre aufhören, u. zw. findet man auf Tafel IV des Anhanges für Kinder ohne Unterschied des Geschlechtes in den Columnen 3, 4, 5, 6 und 7 immer unter a die Werte der jährlich vorhinein und unter b diejenigen der in gleichen Raten monatlich nachhinein zahlbaren Leibrenten: 1. Es wurde hiebei die sogenannte Florencourt'sche Absterbeordnung verwendet, da dieselbe unter den Mortalitätstafeln, welche mit dem Alter: 0, also z. B. mit 10000 Neugeborenen, ohne Unterschied des Geschlechtes beginnen, für den vorliegenden Zweck am geeignetsten erachtet wird.

Renten können außer auf Lebensdauer auch auf die Dauer der Activität der lebenden Männer gezahlt werden.

Wenn daher zum Unterschied von der Tafel der „lebenden Männer überhaupt“ die eingangs erwähnte Tafel der Activen zeigt, dass von $A(x)$ Männern, welche das beliebige Alter x erfüllen, nach Ablauf eines Jahres nur noch $A(x+1)$, nach 2, 3, ..., m , ... Jahren noch $A(x+2)$, $A(x+3)$, ..., $A(x+m)$, ... Männer in Activität sind, so kann man sich vorstellen, als erhielten jene $A(x)$ Active des Alters x auf die Dauer ihrer Activität jährlich vorhinein je die Rente: 1 ausgezahlt. In diesem Falle würden der Reihe nach die Beträge: $A(x)$, $A(x+1)$, $A(x+2)$, $A(x+3)$, ..., $A(x+m)$, ... u. s. f. bis zum Ende der Tafel fällig, und die gegenwärtigen, d. h. die auf den Beginn der Versicherung bezogenen Werte dieser Rentenzahlungen wären unter Voraussetzung des bekannten Zinsfußes einzeln:

$$A(x), \frac{A(x+1)}{q}, \frac{A(x+2)}{q^2}, \frac{A(x+3)}{q^3}, \dots, \frac{A(x+m)}{q^m}, \dots$$

Für alle $A(x)$ Active, welche diese Versicherung eingehen, wäre sonach die Summe jener gegenwärtigen Rentenwerte, für jeden einzelnen Activen des Alters x der Wert:

$$R_x^a = \frac{A(x) + \frac{A(x+1)}{q} + \frac{A(x+2)}{q^2} + \frac{A(x+3)}{q^3} + \dots + \frac{A(x+m)}{q^m} + \dots}{A(x)}$$

erforderlich. Folglich ist R_x^a der gegenwärtige Wert einer während der ganzen Aktivitätsdauer und jährlich vorhinein zahlbaren Rente: 1 für einen x -jährigen Activen.

Dividirt man Zähler und Nenner des erhaltenen Ausdruckes durch q^x und bezeichnet mit:

$$\frac{A(x)}{q^x} = D_x^a, \quad \frac{A(x+1)}{q^{x+1}} = D_{x+1}^a, \quad \frac{A(x+2)}{q^{x+2}} = D_{x+2}^a, \\ \frac{A(x+3)}{q^{x+3}} = D_{x+3}^a, \quad \dots \quad \frac{A(x+m)}{q^{x+m}} = D_{x+m}^a, \quad \dots$$

die discountirten Zahlen der Activen und mit:

$$\Sigma D_x^a = D_x^a + D_{x+1}^a + D_{x+2}^a + D_{x+3}^a + \dots + D_{x+m}^a + \dots$$

die Summe dieser discountirten Zahlen, so ergibt sich die einfache Beziehung:

$$R_x^a = \frac{\Sigma D_x^a}{D_x^a}.$$

Nach dieser Formel wurden die im „Berichte“ auf Tabelle II befindlichen gegenwärtigen Werte der jährlich anticipativen Aktivitätsrenten: 1 (Col. 6) berechnet.

Um aber mit Hilfe der so gefundenen Werte diejenigen zu bestimmen, welche sich etwa auf eine monatliche Ratenzahlung der Aktivitätsrenten beziehen, beobachte man die für Leibrenten aufgestellten Regeln. Denn dieselben Betrachtungen wie oben sind auch für die Aktivitätsrenten durchzuführen und besteht hiebei nur darin ein Unterschied, dass anstatt der Zahlen der Lebenden diejenigen der Activen in Anwendung kommen. Offenbar bleibt die Correctionsgrösse δ unter Beibehaltung eines $p\%$ igen Zinsfußes dieselbe, und als gegenwärtiger Wert einer in gleichen Raten monatlich vorhinein zahlbaren Aktivitätsrente: 1 für einen x -jährigen Activen ergibt sich:

$$\frac{12}{12} R_x^a = R_x^a - \delta,$$

als gegenwärtiger Wert einer in gleichen Raten monatlich nachhinein zahlbaren Aktivitätsrente: 1 eines ebenfalls x -jährigen Activen:

$$\frac{12}{12} R_x'^a = R_x^a - \left(\delta + \frac{1}{12} \right).$$

Ist $q = 1.04$, so erhält man behufs Umwandlung von R_x^a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12}{12} R_x^a = R_x^a - 0.465 \text{ und} \\ \frac{12}{12} R_x'^a = R_x^a - 0.548. \end{array} \right.$$

Was nun weiters die Formeln für die Werte aufgeschobener und schließlich diejenigen für die Werte aufhörender Aktivitätsrenten betrifft, so gelangt man zu denselben, indem man ganz ähnliche Überlegungen anstellt, wie sie für Leibrenten gemacht wurden. Man kann jedoch die diesbezüglichen Formeln auch sofort angeben, wenn man in den früher erhaltenen Ausdrücken an Stelle der discountirten Zahlen der Lebenden die discountirten Zahlen der Activen substituirt. Der gegenwärtige Wert einer um m Jahre aufgeschobenen und dann, d. h. so lange die Activität dauert, jährlich vorhinein zahlbaren Aktivitätsrente: 1 für einen x -jährigen Activen stellt sich, wie folgt, dar:

$${}^m R_x^a = \frac{\Sigma D_{x+m}^a}{D_x^a} = \frac{D_{x+m}^a}{D_x^a} \cdot R_{x+m}^a,$$

und für den gegenwärtigen Wert einer jährlich vorhinein zahlbaren, aber nach m Jahren aufhörenden Aktivitätsrente von 1 eines ebenfalls x -jährigen Activen besteht die Relation:

$${}^m \mathfrak{R}_x^a = \frac{\Sigma D_x^a - \Sigma D_{x+m}^a}{D_x^a} = R_x^a - \frac{D_{x+m}^a}{D_x^a} \cdot R_{x+m}^a.$$

Sind die aufhörenden oder auch die aufgeschobenen Aktivitätsrenten: 1 nicht jährlich vorhinein, sondern in gleichen Raten monatlich vor- oder nachhinein auszahlbar, so wird man zu den diesbezüglichen gegenwärtigen Werten gelangen, wenn man in den für ${}^m \mathfrak{R}_x^a$ und ${}^m R_x^a$ gefundenen Ausdrücken die Werte der jährlich vorhinein zahlbaren Aktivitätsrenten: 1, also R_x^a und R_{x+m}^a einfach in bekannter Weise corrigirt. Hienach würde sich z. B. als gegenwärtiger Wert einer in gleichen Raten monatlich nachhinein zahlbaren und nach m Jahren aufhörenden Aktivitätsrente: 1 für einen x -jährigen Mann und unter Voraussetzung eines 4⁰/₁₀igen Zinsfußes ergeben:

$$\frac{12}{12} \mathfrak{R}_x'^a = (R_x^a - 0.548) - \frac{D_{x+m}^a}{D_x^a} \cdot (R_{x+m}^a - 0.548).$$

Die Gleichung lässt sich mit ausschließlicher Verwendung der discountirten Zahlen der Activen ohneweiters auf die Form:

$$\frac{{}^m_{12}R_x^a}{12} = \frac{(\Sigma D_x^a - 0.548 D_x^a) - (\Sigma D_{x+m}^a - 0.548 D_{x+m}^a)}{D_x^a}$$

bringen. Bestimmt man für alle Alter der Activen die Differenzen $(\Sigma D_x^a - 0.548 D_x^a)$ ein für allemal, so lassen sich die Werte $\frac{{}^m_{12}R_x^a}{12}$ leicht berechnen.

In dieser Weise wurden der Reihe nach für eine längste Bezugsdauer m von 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 und 45 Jahren die auf Tafel V des Anhangs befindlichen Werte ermittelt.

Wir schließen hiemit die Erörterungen über die Leib- und Activitätsrenten ab und kommen später auf die praktische Anwendung der gefundenen Formeln zurück.

II. Invaliditäts-Renten.

(Invaliden-Pensionen, -Provisionen.)

Werden Renten im Falle etwa eintretender Invalidität und auf die Dauer derselben, d. h. vom Beginn der Invalidität bis zum Ableben des Invaliden gewährt, so hat man es mit sogenannten Invaliditätsrenten zu thun, und die diesbezüglichen Versicherungen heissen Invalidenversicherungen.

Obwohl die Invalidenversicherung mannigfache Combinationen zulässt, unterscheidet man in der Regel doch zwei Hauptgruppen derselben, nämlich die Versicherung auf constante Invaliditätsrenten, deren Höhe von Anfang an bestimmt ist und die Versicherung auf steigende Invaliditätsrenten, deren Höhe von der Summe der zurückgelegten Activitätsjahre abhängt.

Gesetzt den Fall, $A(x)$ Männer, welche in der Tafel der Activen das Alter x erfüllen, wollen den Anspruch auf die constante jährliche Invaliditätsrente: 1 erwerben, so hat man, um den gegenwärtigen Wert dieser Versicherung zu berechnen, nach der obigen Definition streng genommen die Summe der gegenwärtigen Werte derjenigen Rentenzahlungen (Pensionen, Provisionen) zu bilden, welche in den aufeinanderfolgenden Versicherungsjahren hinsichtlich der überhaupt Invalide gewordenen, u. zw. vom Beginne der Invalidität bis zum Lebensende der Invali-

den erwartungsgemäß in Betracht kommen. Da die Zahlen der Activen sich aber immer auf den Anfang eines Rechnungsjahres beziehen, so wäre diese Berechnung insoferne mit einigen Umständen verbunden, als den im Laufe des Jahres entstandenen Invaliden beim Eintritt der Invalidität nicht ganze sondern gebrochene Alterszahlen zukommen.

Sehen wir daher vorläufig von den Pensionsraten ab, welche den überhaupt Invalid gewordenen etwa für die im Pensionierungsjahre noch durchlebte Zeit zu vergüten wären, und beschränken uns lediglich auf diejenigen Leibrenten: 1, welche vom Beginne des auf den Eintritt der Invalidität zunächst folgenden, in vollen Jahren angegebenen Alters bis zum Tode eines Invaliden auszuzahlen sind, so kann man mit $J(x+1)$ jene Anzahl der aus $A(x)$ Activen im Laufe des ersten Versicherungsjahres entstandenen Invaliden bezeichnen, welche dieses Jahr überleben, also zu Beginn des zweiten Versicherungsjahres $(x+1)$ Jahre alt sind und zu dieser Zeit in den Rentenbezug treten. Für einen $(x+1)$ -jährigen Invaliden wurde der baare Wert der auf Lebensdauer jährlich vorhinein zahlbaren Leibrente: 1 bekanntlich durch R_{x+1}^i ausgedrückt. Wenn demnach $J(x+1)$ Invalide solche Renten beziehen, so ist der baare Wert derselben zu Anfang des zweiten Versicherungsjahres: $J(x+1) \cdot R_{x+1}^i$, und dieses Product hat zu Beginn der Versicherung überhaupt und unter Voraussetzung eines $p\%$ igen Zinsfußes den Wert:

$$\frac{J(x+1) \cdot R_{x+1}^i}{q},$$

worin $q = \frac{100+p}{100}$ ist.

Bedenkt man weiters, daß von $A(x)$ Activen sich nach 1, 2, 3, . . . m , . . . Jahren oder, was dasselbe ist, zu Beginn des 2., 3., 4., . . . $(m+1)$,^{ten} . . . Versicherungsjahres tafelmäßig noch: $A(x+1)$, $A(x+2)$, $A(x+3)$, . . . $A(x+m)$, . . . Männer in Activität befinden, so kann man sich unter: $J(x+2)$, $J(x+3)$, $J(x+4)$, . . . $J(x+m+1)$, . . . diejenigen der Reihe nach aus: $A(x+1)$, $A(x+2)$, $A(x+3)$, . . . $A(x+m)$, . . . Activen hervorgegangenen und beziehungsweise im Laufe des 2., 3., 4., . . . $(m+1)$,^{ten} . . . Versicherungsjahres entstandenen Invaliden vorstellen, welche das respective 2., 3., 4., . . . $(m+1)$,^{te} . . . Versicherungsjahr überleben, also das respective $(x+2)$,^{te}, $(x+3)$,^{te}, $(x+4)$,^{te} . . . $(x+m+1)$,^{te} . . . Lebensjahr erreichen. Die jährlich anticipativen Leibrenten: 1, welche die so bezeichneten Invaliden der Annahme nach genießen sollen, besitzen den zurückgelegten verschiedenen Lebensaltern entsprechend bekanntlich die baaren Werte: R_{x+2}^i , R_{x+3}^i , R_{x+4}^i , . . . R_{x+m+1}^i , . . . Bildet man daher die Producte: $J(x+2) \cdot R_{x+2}^i$, $J(x+3) \cdot R_{x+3}^i$, $J(x+4) \cdot R_{x+4}^i$, . . . $J(x+m+1) \cdot R_{x+m+1}^i$, . . .

Bruderladen.

so haben dieselben auf den Beginn des ersten Versicherungsjahres bezogen die gegenwärtigen Werte:

$$\frac{J(x+2) \cdot R_{x+2}^i}{q^2}, \frac{J(x+3) \cdot R_{x+3}^i}{q^3}, \frac{J(x+4) \cdot R_{x+4}^i}{q^4}, \dots$$

$$\frac{J(x+m+1) \cdot R_{x+m+1}^i}{q^{m+1}},$$

u. s. f. bis zum Ende der Tafel der im Laufe des Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Invaliden. (Siehe den „Bericht“ Tab. I, Col. 8.)

Was nun die Summe:

$$\frac{J(x+1) \cdot R_{x+1}^i}{q} + \frac{J(x+2) \cdot R_{x+2}^i}{q^2} + \frac{J(x+3) \cdot R_{x+3}^i}{q^3} + \frac{J(x+4) \cdot R_{x+4}^i}{q^4} + \dots$$

$$+ \frac{J(x+m+1) \cdot R_{x+m+1}^i}{q^{m+1}} + \dots$$

anbelangt, so betrifft dieselbe alle $A(x)$ der Annahme nach versicherten activen Männer, und participirt jeder einzelne x -jährige Active mit dem Betrag:

$$\frac{J(x+1) \cdot R_{x+1}^i}{q} + \frac{J(x+2) \cdot R_{x+2}^i}{q^2} + \frac{J(x+3) \cdot R_{x+3}^i}{q^3} + \frac{J(x+4) \cdot R_{x+4}^i}{q^4} + \dots$$

$$A_x$$

$$+ \frac{J(x+m+1) \cdot R_{x+m+1}^i}{q^{m+1}} + \dots$$

$$A_x$$

Dividirt man Nenner und Zähler dieses Bruches durch q^x , so erscheint es zweckmäßig für die discountirten Zahlen der im Laufe des Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Invaliden folgende Buchstabenzeichen einführen:

$$\frac{J(x+1)}{q^{x+1}} = D_{x+1}^J, \frac{J(x+2)}{q^{x+2}} = D_{x+2}^J, \frac{J(x+3)}{q^{x+3}} = D_{x+3}^J, \frac{J(x+4)}{q^{x+4}} = D_{x+4}^J,$$

$$\dots \frac{J(x+m+1)}{q^{x+m+1}} = D_{x+m+1}^J, \dots$$

Da nach Früherem die discountirte Zahl der Activen $A(x)$ durch:

$$D_x^a = \frac{A(x)}{q^x}$$

ausgedrückt wurde, und die obige Summe kürzer, wie folgt, geschrieben werden kann:

$$D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i + D_{x+2}^J \cdot R_{x+2}^i + D_{x+3}^J \cdot R_{x+3}^i + D_{x+4}^J \cdot R_{x+4}^i + \dots \\ + D_{x+m+1}^J \cdot R_{x+m+1}^i + \dots = \Sigma (D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i),$$

so ergibt sich näherungsweise als gegenwärtiger Wert des unmittelbaren Anspruches auf die jährliche Invaliditätsrente: 1 oder, was dasselbe ist, als einmalige Prämie P_x , durch deren sofortige Zahlung jeder x -jährige Active die Invalidenpension (Provision) vom unveränderlichen jährlichen Ausmaß: 1 erwerben kann:

$$P_x = \frac{\Sigma (D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i)}{D_x^a}.$$

Nach dieser Formel wurden die im „Berichte“ auf Tab. IV, Col. 6 verzeichneten Werte für jedes in Betracht kommende Alter der Activen bestimmt, hierbei aber die auf Tab. III, Col. 6 befindlichen Werte R_x^i der jährlich anticipativen Leibrenten von 1 für Invalide, und die auf Tab. II, Col. 4 desselben Berichtes angegebenen discountirten Zahlen D_x^a der Activen benützt.

Demnach berechnet sich beispielsweise, wenn das Alter eines Activen beim Eintritt in die Versicherung $x = 25$ Jahre ist, die einmalige Prämie zur Erwerbung des Anspruches auf die Invalidenpension (Provision) von 1 fl., wie folgt:

$$P_{25} = \frac{D_{26}^J \cdot R_{26}^i + D_{27}^J \cdot R_{27}^i + \dots + D_{83}^J \cdot R_{83}^i}{D_{25}^a} = \\ = \frac{197.35 + 239.95 + \dots + 1.419}{35361.2} = \frac{53866.0}{35361.2} = 1.523 \text{ fl.} = 1 \text{ fl. } 52 \text{ kr.}$$

Was die bei der Bestimmung von P_x vernachlässigten Pensions- (Provisions-) Raten betrifft, welche an die überhaupt entstandenen Invaliden, eventuell noch für die im Pensionierungsjahre durchlebte Zeit zu zahlen sind, so hat streng genommen eine Correction der wie oben gefundenen Werte stattzufinden. Obwohl diese Correction sich mathematisch keineswegs als undurchführbar erweist, so müsste doch für einen speciellen Fall die Art und Weise der Auszahlung der Pensionen (Provisionen) bekannt sein, um etwa mit Hilfe der Annahme, dass die im Laufe des Jahres überhaupt invalid gewordenen Activen durchschnittlich noch ein halbes Jahr activ waren, und auf Grund der Regeln, welche für

eine in kürzeren Terminen als jährlich, z. B. halb-, vierteljährlich oder monatlich erfolgende Rentenauszahlung, also für die Leibrentenwerte: $R_{x+1}^i, R_{x+2}^i, R_{x+3}^i \dots$ u. s. f. gelten, die diesbezüglichen Berechnungen vornehmen zu können. In der Praxis werden jedoch diese Complicationen womöglich vermieden, und sieht man von der bezeichneten Correction meist deshalb ab, weil die Berücksichtigung der erwähnten Umstände besonders für die jüngeren und mittleren Altersklassen der Activen geringe Änderungen der Werte P_x hervorbringt, und es endlich in der Natur der Sache liegt, dass die bezüglichen Ungenauigkeiten immer untergeordneter Art sind.

In vielen Fällen beruht die Invalidenversicherung auf der Voraussetzung, dass im Zustande der Activität erst eine Anzahl Jahre (Carenz-, Probejahre) vorübergehen müssen, ehe die Berechtigung zum Bezuge einer Invalidenpension (Provision) eintritt. Offenbar ändert sich die Formel für P_x unter dieser Annahme.

Sind demnach ε Carenzjahre in Aussicht genommen, so besitzt jede Altersklasse beim Eintritt in die Versicherung erst nach Ablauf von ε Activitätsjahren das Recht auf Pensionirung (Provisionirung), d. h. alle in dieser Zeit entstandenen Invaliden gehen leer aus, sind nicht anspruchsberechtigt oder pensions-, provisionsunfähig. Vergewärtigt man sich also die Reihe: $\Sigma(D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i)$, so fallen sachgemäß ε Glieder aus, und man erhält allgemein:

$${}^{\varepsilon}P_x = \frac{\Sigma(D_{x+\varepsilon+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+1}^i)}{D_x^a}$$

als einmalige Prämie für die jährliche Invalidenpension (Provision): 1 mit ε Carenzjahren, oder ${}^{\varepsilon}P_x$ ist der gegenwärtige Wert des um ε Jahre aufgeschobenen Anspruches auf die Invaliditätsrente von jährlich 1 eines x -jährigen Activen.

Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $D_{x+\varepsilon}^a$, so ergibt sich:

$${}^{\varepsilon}P_x = \frac{D_{x+\varepsilon}^a}{D_x^a} \cdot P_{x+\varepsilon},$$

worin $P_{x+\varepsilon}$ die einmalige Prämie zur Erwerbung des unmittelbaren Anspruches auf die jährliche Invaliditätsrente: 1 für einen $(x+\varepsilon)$ -jährigen Activen vorstellt.

Zum Schlusse der Erörterungen über constante Invaliditätsrenten muss noch einer Versicherungscombination Erwähnung gethan werden,

bei welcher es sich um die Berechnung des gegenwärtigen Wertes Q_x einer jährlich anticipativen Rente von 1 handelt, deren Bezug für einen gegenwärtig x -jährigen Activen mit dem vollendeten n^{ten} Lebensjahre unbedingt, u. zw. auf Lebensdauer, früher nur im Falle etwa eingetretener Invalidität erfolgt.

Nach der hier gestellten Aufgabe ist also die jährliche Rente: 1 vom erreichten n^{ten} Lebensjahre an ohne Rücksicht darauf zu gewähren, ob der ehemals x -jährige Active zu dieser Zeit noch dem Activstande angehört und in demselben verbleibt oder nicht. Denkt man sich demnach, dass die genannte Versicherung zugleich von $A(x)$ Männern, welche in der Tafel der Activen die Gruppe der x -jährigen bilden, abgeschlossen wurde, so kann man sagen, dass vom Alter n angefangen nicht allein die tafelmäßig entstehenden Invaliden, sondern auch die nach der Tafel noch in Activität verbleibenden Männer in den Rentenbezug treten. In diesem Sinne wäre also die jährliche Rente von 1 im Falle der Invalidität überhaupt u. zw. auf Lebensdauer, außerdem aber auch allen n -jährigen Activen $A(n)$, insoferne und so lange dieselben tafelmäßig noch activ bleiben, auszuzahlen. Und nunmehr hat die Lösung der obigen Aufgabe keine weiteren Schwierigkeiten, denn es wird sich bei Berechnung von Q_x für jeden x -jährigen Activen einfach um die Addition des baaren Wertes einer unmittelbaren Invaliditätsrente von jährlich 1 und desjenigen einer bis zum n^{ten} Lebensjahre, respective um $n-x$ Jahre aufgeschobenen Activitätsrente von ebenfalls jährlich 1 handeln.

Man erhält sonach:

$$Q_x = P_x + {}^{n-x}R_x^a,$$

und da nach früheren Entwicklungen die Gleichung besteht:

$${}^{n-x}R_x^a = \frac{D_n^a}{D_x^a} \cdot R_n^a,$$

so ergibt sich, wenn man für P_x den bezüglichen Ausdruck substituirt:

$$Q_x = \frac{\Sigma(D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i) + D_n^a \cdot R_n^a}{D_x^a}$$

oder auch:

$$Q_x = \frac{\Sigma(D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i) + \Sigma D_n^a}{D_x^a}.$$

Wäre beispielsweise $x=25$ und $n=60$ Jahre, so hätte man:

$$Q_{25} = \frac{\Sigma(D_{26}^J \cdot R_{26}^i) + \Sigma D_{60}^a}{D_{25}^a},$$

und wenn man im „Berichte“ auf Tabelle IV, Colonne 4 und Tabelle II, Colonne 4 und 5 die bezüglich auf Grund einer 4%igen Zinsfußes berechneten Zahlenwerte abliest:

$$Q_{25} = \frac{53866.0 + 22069.5}{35361.2} = 2.1474.$$

Die einmalige Prämie behufs Erwerbung des Anspruches auf eine jährliche Rente von 100 fl., welche von einem gegenwärtig fünfundzwanzig-jährigen Activen mit dem vollendeten 60. Lebensjahre unbedingt und auf Lebensdauer, früher nur im Falle eingetretener Invalidität bezogen wird, beträgt bei 4% Zinsen und Zinseszinsen 214 fl. 74 kr. österr. Währ.

Complicirter als die vorhergehenden Ausdrücke gestalten sich die Formeln, welche die einmaligen Prämien für steigende Ansprüche auf Invaliden-Pensionen (Provisionen) darstellen.

Der Modus für das Steigen des Ausmaßes der Ansprüche auf Invaliden-Pension (Provision) kann ein sehr verschiedener sein, und es würde zu weit führen jede beliebige Form für diese Steigerung hier getrennt zu behandeln. Wir beschäftigen uns daher mit einem allgemeinen Fall, welcher entsprechend specificirt werden soll, um zu zeigen, wie die Werte steigender Pensions- (Provisions-) Ansprüche berechnet werden, wenn denselben die bei den Bruderladen üblichen Pensions- (Provisions-) Normalien (Scalen) zu Grunde liegen.

Man überlege, dass der Anspruch auf Pension (Provision) während der ganzen Dauer der Activität steigen oder nur bis zur Erreichung einer bestimmten Anzahl Activitätsjahre, respective eines gewissen im Zustande der Activität zurückgelegten Alters wachsen und dann constant bleiben kann, dass man Carenzjahre voraussetzen oder nicht voraussetzen, ferner ein der Activitätsdauer entsprechendes jährliches oder periodisches Wachsen der Ausmaße der Pensions- (Provisions-) Ansprüche annehmen kann, und bedenke schliesslich, dass die Pensionen (Provisionen) um gleiche oder ungleiche Beträge steigen können.

Und nunmehr legen wir uns die Aufgabe vor, die einmalige Prämie eines x -jährigen Activen zu bestimmen, welcher den Anspruch auf eine unmittelbare und nach Activitäts- (Theilnahme-) Jahren z steigende jährliche Pension (Provision) λ_{x+z+1} erwerben soll.

Angenommen, $A(x)$ Active, welche in der Tafel das Alter x erfüllen, treten in die Versicherung ein, so erhält jeder der tafelmässig im Laufe des ersten Versicherungsjahres entstandenen und das Jahr überlebenden Invaliden $J(x+1)$, da in diesem Falle die anrechenbare Activitätsdauer $z=0$ ist, vom erreichten $x+1^{\text{ten}}$ Lebensjahre bis zum Ableben die jährliche Leibrente λ_{x+1} , und die in späteren Versicherungsjahren in Betracht kom-

menden Invaliden: $J(x+2)$, $J(x+3)$, $J(x+4)$, ... u. s. f. bis zum Ende der Tafel, für welche z der Reihe nach die ganzen Zahlenwerte: 1, 2, 3, ... annimmt, haben die beziehungsweisen jährlichen Pensionen (Provisionen): λ_{x+2} , λ_{x+3} , λ_{x+4} , ... u. s. f. zu beanspruchen. Da diese Pensionen (Provisionen) der Aufgabe gemäß um so höher sind, je mehr Aktivitätsjahre zurückgelegt wurden, so besteht ohne Zweifel die Ungleichung:

$$\lambda_{x+1} < \lambda_{x+2} < \lambda_{x+3} < \lambda_{x+4} < \dots$$

u. s. f. bis zum Ende der Tafel, und um den gegenwärtigen Wert des Anspruches eines x -jährigen Activen auf irgend eine dieser steigenden jährlichen Pensionen (Provisionen) λ_{x+z+1} zu finden, wird man nach denselben Grundsätzen vorgehen, welche im gegenwärtigen Abschnitte bei Versicherung des constanten Anspruches auf die Invaliditätsrente von jährlich 1 dargelegt wurden.

Wenn man sich also vorstellt, dass im vorliegenden Falle allgemein die an $J(x+z+1)$ Invalide auszuzahlenden, jährlich-anticipativen Leibrenten: λ_{x+z+1} mit Erreichung des Alters $x+z+1$ den baaren Wert:

$$\lambda_{x+z+1} \cdot J(x+z+1) \cdot R_{x+z+1}^i,$$

und auf den Beginn des ersten Versicherungsjahres bezogen, den Wert:

$$\frac{\lambda_{x+z+1} \cdot J(x+z+1) \cdot R_{x+z+1}^i}{q^{z+1}}$$

besitzen, worin R_{x+z+1}^i den bekannten baaren Wert der jährlich anticipativen Leibrente: 1 eines $(x+z+1)$ -jährigen Invaliden bedeutet, so erhält man nach der Analogie der Formel für P_x sofort den Wert Π_x , d. h. die einmalige Prämie eines x -jährigen Activen zur Erwerbung des Anspruches auf irgend eine mit dem bezüglichen Invalidisirungsalter steigende Rente vom respectiven jährlichen Ausmaße: λ_{x+1} , λ_{x+2} , λ_{x+3} , ... u. s. f. bis zum Ende der Tafel, wie folgt:

$$\Pi_x = \frac{\lambda_{x+1} \cdot D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i + \lambda_{x+2} \cdot D_{x+2}^J \cdot R_{x+2}^i + \lambda_{x+3} \cdot D_{x+3}^J \cdot R_{x+3}^i + \dots}{D_x^a}.$$

Unter der Voraussetzung von ε Carenzjahren, d. h. unter der Bedingung, dass die innerhalb der ersten ε Jahre der Versicherung invalid gewordenen Activen als pensions-, provisionsunfähig bezeichnet werden, fallen im Zähler des vorstehenden Bruches ε Glieder aus, und Π_x geht über in:

$$\varepsilon \Pi_x = \frac{\lambda_{x+\varepsilon+1} \cdot D_{x+\varepsilon+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+1}^i + \lambda_{x+\varepsilon+2} \cdot D_{x+\varepsilon+2}^J \cdot R_{x+\varepsilon+2}^i + \dots}{D_x^a}.$$

Da von $A(x)$ versicherten Activen nach $\varepsilon+n$ Jahren noch $A(x+\varepsilon+n)$ activ sind, kann man annehmen, dass den aus letzteren entstandenen und das $(\varepsilon+n+1)^{\text{te}}$ Versicherungsjahr überlebenden Invaliden: $J(x+\varepsilon+n+1)$ des Alters $(x+\varepsilon+n+1)$ das höchste Pensions- (Provisions-) Ausmaß und den etwa später in Betracht kommenden Invaliden dasselbe Ausmaß: $\lambda_{x+\varepsilon+n+1}$ ausgezahlt werde. Hiernach ergibt sich für einen x -jährigen Activen als einmalige Prämie:

$${}^{\varepsilon}\Pi_x^n = \frac{\lambda_{x+\varepsilon+1} \cdot D_{x+\varepsilon+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+1}^i + \dots + \lambda_{x+\varepsilon+n+1} \cdot [D_{x+\varepsilon+n+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+n+1}^i + \dots + D_{x+\varepsilon+n+2}^J \cdot R_{x+\varepsilon+n+2}^i + \dots]}{D_x^a},$$

und wenn man substituirt:

$$D_{x+\varepsilon+n+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+n+1}^i + D_{x+\varepsilon+n+2}^J \cdot R_{x+\varepsilon+n+2}^i + \dots = \Sigma(D_{x+\varepsilon+n+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+n+1}^i),$$

so kann man für ${}^{\varepsilon}\Pi_x^n$ auch schreiben:

$${}^{\varepsilon}\Pi_x^n = \frac{\lambda_{x+\varepsilon+1} \cdot D_{x+\varepsilon+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+1}^i + \dots + \lambda_{x+\varepsilon+n+1} \cdot \Sigma(D_{x+\varepsilon+n+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+n+1}^i)}{D_x^a}.$$

In dem speciellen Falle, als man unter $\varepsilon+n=s$ Activitätsjahre eine für alle Eintrittsalter der Activen gleiche Constante zu verstehen hat, d. h. die steigenden Pensions- (Provisions-) Ausmäße vom Eintrittsalter x , respective vom ersten Invalidisirungsalter $x+1$ unabhängig sind, lässt sich ${}^{\varepsilon}\Pi_x^n$ einfacher, wie folgt, darstellen:

$${}^{\varepsilon}\Pi_x' = \frac{\lambda_{\varepsilon} \cdot D_{x+\varepsilon+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+1}^i + \lambda_{\varepsilon+1} \cdot D_{x+\varepsilon+2}^J \cdot R_{x+\varepsilon+2}^i + \dots + \lambda_{\varepsilon+n} \cdot \Sigma(D_{x+\varepsilon+n+1}^J \cdot R_{x+\varepsilon+n+1}^i)}{D_x^a}.$$

Man kann dann sagen: „ ${}^{\varepsilon}\Pi_x^n$ ist die einmalige Prämie eines Activen vom beliebigen Alter x , welcher unter der Voraussetzung von ε Carenzjahren den Anspruch auf eine bis maximal zum s^{ten} Activitätsjahre steigende Invaliditätsrente (Pension, Provision) λ_{ε} , und zwar nach zurückgelegten ε Activitätsjahren den Anspruch auf das jährliche Ausmaß λ_{ε} , nach zurückgelegten $\varepsilon+1$ Activitätsjahren jenen auf das jährliche Ausmaß $\lambda_{\varepsilon+1}$, u. s. f. nach zurückgelegten $\varepsilon+n=s$ Activitätsjahren den Anspruch auf das jährliche Ausmaß $\lambda_{\varepsilon+n}$ erwerben will.“

Die für ${}^n\Pi'_x$ erhaltene Formel wird nun im Folgenden benützt werden, um in gewissen Fällen, wo die Art und Weise des Steigens der Pensionen (Provisionen) innerhalb des Zeitraumes von ε bis $\varepsilon+n$ Aktivitätsjahren näher bekannt ist, die entsprechenden Ausdrücke für die einmalige Prämie eines x -jährigen Activen aufzusuchen.

Angenommen, es fände nach Ablauf von ε Carenzjahren ein periodisches Steigen der zu erwartenden jährlichen Pensions- (Provisions-) Ausmaße, und zwar von ρ zu ρ Aktivitätsjahren bis zur Erreichung des jährlichen Ausmaßes $\lambda_{\varepsilon+n} = \lambda_{\varepsilon+x\rho}$ statt, wobei $n = x\rho$ ist, und x eine gerade oder ungerade ganze Zahl sein kann, so hat man einfach zu setzen:

$$\begin{aligned}\lambda_{\varepsilon} &= \lambda_{\varepsilon+1} = \lambda_{\varepsilon+2} = \dots = \lambda_{\varepsilon+\rho-1}, \\ \lambda_{\varepsilon+\rho} &= \lambda_{\varepsilon+\rho+1} = \lambda_{\varepsilon+\rho+2} = \dots = \lambda_{\varepsilon+2\rho-1}, \\ \lambda_{\varepsilon+2\rho} &= \lambda_{\varepsilon+2\rho+1} = \lambda_{\varepsilon+2\rho+2} = \dots = \lambda_{\varepsilon+3\rho-1}, \\ &\dots = \dots = \dots = \dots = \dots, \\ \lambda_{\varepsilon+(x-1)\rho} &= \lambda_{\varepsilon+(x-1)\rho+1} = \lambda_{\varepsilon+(x-1)\rho+2} = \dots = \lambda_{\varepsilon+x\rho-1}.\end{aligned}$$

Schreibt man der Kürze halber $x+\varepsilon=n$, so geht die obige Gleichung durch die vorstehenden Bedingungen über in:

$$\begin{aligned}{}^n\Pi'_x &= \frac{\lambda_{\varepsilon}[D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i + \dots + D_{\eta+\rho}^J R_{\eta+\rho}^i] + \lambda_{\varepsilon+\rho}[D_{\eta+\rho+1}^J R_{\eta+\rho+1}^i + \dots + \\ &\quad D_{\eta+2\rho}^J R_{\eta+2\rho}^i] + \dots + \lambda_{\varepsilon+(x-1)\rho}[D_{\eta+(x-1)\rho+1}^J R_{\eta+(x-1)\rho+1}^i + \dots + \\ &\quad D_{\eta+x\rho}^J R_{\eta+x\rho}^i] + \lambda_{\varepsilon+x\rho} \Sigma(D_{\eta+x\rho+1}^J R_{\eta+x\rho+1}^i)}{D_x^a}.\end{aligned}$$

Es bestehen nun die Relationen:

$$\begin{aligned}D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i + \dots + D_{\eta+\rho}^J R_{\eta+\rho}^i &= \Sigma(D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i) - \Sigma(D_{\eta+\rho+1}^J R_{\eta+\rho+1}^i), \\ D_{\eta+\rho+1}^J R_{\eta+\rho+1}^i + \dots + D_{\eta+2\rho}^J R_{\eta+2\rho}^i &= \Sigma(D_{\eta+\rho+1}^J R_{\eta+\rho+1}^i) - \Sigma(D_{\eta+2\rho+1}^J R_{\eta+2\rho+1}^i), \\ &\dots = \dots = \dots = \dots, \\ D_{\eta+(x-1)\rho+1}^J R_{\eta+(x-1)\rho+1}^i + \dots + D_{\eta+x\rho}^J R_{\eta+x\rho}^i &= \Sigma(D_{\eta+(x-1)\rho+1}^J R_{\eta+(x-1)\rho+1}^i) - \\ &\quad - \Sigma(D_{\eta+x\rho+1}^J R_{\eta+x\rho+1}^i).\end{aligned}$$

Da $x\rho = n$ und $(x-1)\rho = n-\rho$ ist, man weiters der besseren Übersichtlichkeit wegen allgemein $\Sigma(D_{\eta}^J R_{\eta}^i)$ mit Σ_{η} bezeichnen kann, so ergibt sich für ${}^n\Pi'_x$ der Wert:

$${}^{\varepsilon}\prod_x' = \frac{\lambda_{\varepsilon}[\Sigma_{\eta+1} - \Sigma_{\eta+\rho+1}] + \lambda_{\varepsilon+\rho}[\Sigma_{\eta+\rho+1} - \Sigma_{\eta+2\rho+1}] + \dots +}{D_x^{\alpha}} \\ + \frac{\lambda_{\varepsilon+n-\rho}[\Sigma_{\eta+n-\rho+1} - \Sigma_{\eta+n+1}] + \lambda_{\varepsilon+n}\Sigma_{\varepsilon+n+1}}{D_x^{\alpha}},$$

welche Gleichung sich, da $\lambda_{\varepsilon+n} > \lambda_{\varepsilon+n-\rho} > \dots > \lambda_{\varepsilon+\rho} > \lambda_{\varepsilon}$ ist, auch, wie folgt, schreiben lässt:

$${}^{\varepsilon}\prod_x' = \frac{\lambda_{\varepsilon} \cdot \Sigma_{\eta+1} + (\lambda_{\varepsilon+\rho} - \lambda_{\varepsilon})\Sigma_{\eta+\rho+1} + (\lambda_{\varepsilon+2\rho} - \lambda_{\varepsilon+\rho})\Sigma_{\eta+2\rho+1} + \dots +}{D_x^{\alpha}} \\ + \frac{(\lambda_{\varepsilon+n} - \lambda_{\varepsilon+n-\rho})\Sigma_{\eta+n+1}}{D_x^{\alpha}},$$

und dieser Ausdruck vereinfacht sich nun, wenn einfache Beziehungen zwischen λ_{ε} , $\lambda_{\varepsilon+\rho}$, $\lambda_{\varepsilon+2\rho}$, \dots , $\lambda_{\varepsilon+n}$ stattfinden.

Wir wenden uns nun wieder zur Gleichung für ${}^{\varepsilon}\prod_x'$, behalten also ein nach Ablauf von ε Carenzjahren vor sich gehendes jährliches Anwachsen der Pensions- (Provisions-) Ansprüche bei, stellen aber hinsichtlich der jährlichen Ausmaße, welche nach zurückgelegten ε , $\varepsilon+1$, $\varepsilon+2$, \dots , $\varepsilon+n$ Aktivitätsjahren zu gewähren sind, folgende Bedingungen auf:

$$\lambda_{\varepsilon+n} - \lambda_{\varepsilon+n-1} = \lambda_{\varepsilon+n-1} - \lambda_{\varepsilon+n-2} = \dots = \lambda_{\varepsilon+2} - \lambda_{\varepsilon+1} = \lambda_{\varepsilon+1} - \lambda_{\varepsilon} = \Delta,$$

welche anders geschrieben lauten:

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon} &= \lambda_{\varepsilon}, \\ \lambda_{\varepsilon+1} &= \Delta + \lambda_{\varepsilon}, \\ \lambda_{\varepsilon+2} &= 2\Delta + \lambda_{\varepsilon}, \\ \dots &= \dots, \\ \lambda_{\varepsilon+n} &= n\Delta + \lambda_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Wenn ${}^{\varepsilon}\prod_x^{\Delta'}$ derjenige Wert von ${}^{\varepsilon}\prod_x'$ ist, welcher diesen Beziehungen entspricht, so erhält man, indem man wieder $x + \varepsilon = \eta$ setzt:

$${}^{\varepsilon}\prod_x^{\Delta'} = \frac{\lambda_{\varepsilon} D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i + (\Delta + \lambda_{\varepsilon}) D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i + \dots + (n\Delta + \lambda_{\varepsilon}) \Sigma_{(\eta+n+1)}^J R_{\eta+n+1}^i)}{D_x^{\alpha}} \\ = \frac{\lambda_{\varepsilon} [D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i + D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i + \dots + D_{\eta+n}^J R_{\eta+n}^i + \Sigma (D_{\eta+n+1}^J R_{\eta+n+1}^i)] +}{D_x^{\alpha}} \\ + \frac{\Delta [D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i + 2D_{\eta+3}^J R_{\eta+3}^i + \dots + (n-1)D_{\eta+n}^J R_{\eta+n}^i +}{D_x^{\alpha}} \\ + \frac{n\Sigma (D_{\eta+n+1}^J R_{\eta+n+1}^i)]}{D_x^{\alpha}}.$$

Da nun aber, wie bekannt:

$$D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i + D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i + \dots + D_{\eta+n}^J R_{\eta+n}^i + \Sigma(D_{\eta+n+1}^J R_{\eta+n+1}^i) = \Sigma(D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i),$$

und wie leicht nachgewiesen werden kann:

$$\begin{aligned} D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i + 2D_{\eta+3}^J R_{\eta+3}^i + \dots + (n-1)D_{\eta+n}^J R_{\eta+n}^i + n\Sigma(D_{\eta+n+1}^J R_{\eta+n+1}^i) \\ = \Sigma(D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i) + \Sigma(D_{\eta+3}^J R_{\eta+3}^i) + \dots + \Sigma(D_{\eta+n+1}^J R_{\eta+n+1}^i) \end{aligned}$$

ist, so geht ${}^n\Pi_x^{\Delta'}$ über in:

$${}^n\Pi_x^{\Delta'} = \frac{\lambda_s \Sigma(D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i) + \Delta[\Sigma(D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i) + \Sigma(D_{\eta+3}^J R_{\eta+3}^i) + \dots + \Sigma(D_{\eta+n+1}^J R_{\eta+n+1}^i)]}{D_x^a}.$$

Bedenkt man, dass von den $A(x)$ activen Männern, welche in der Tafel das Alter x erfüllen, sich mit dem Alter von 83 Jahren keiner mehr in Activität befindet, also mit dem Alter 83 auch die Tafel der im Laufe des Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Invaliden abschließt, so lässt die Klammer noch eine andere Schreibweise zu. Setzt man wieder $\Sigma(D_{\eta}^J R_{\eta}^i) = \Sigma_{\eta}$, so kann man für die Summe der Summen Σ_{η} folgende Bezeichnungen einführen:

$$\Sigma_{\eta+2} + \Sigma_{\eta+3} + \dots + \Sigma_{\eta+n+1} + \Sigma_{\eta+n+2} + \dots + \Sigma_{83} = \Sigma \Sigma(D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i),$$

und ganz analog:

$$\Sigma_{\eta+n+2} + \Sigma_{\eta+n+3} + \dots + \Sigma_{83} = \Sigma \Sigma(D_{\eta+n+2}^J R_{\eta+n+2}^i).$$

Demnach ist kürzer:

$$\Sigma_{\eta+2} + \Sigma_{\eta+3} + \dots + \Sigma_{\eta+n+1} = \Sigma \Sigma(D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i) - \Sigma \Sigma(D_{\eta+n+2}^J R_{\eta+n+2}^i),$$

oder:

$${}^n\Pi_x^{\Delta'} = \frac{\lambda_s \cdot \Sigma(D_{\eta+1}^J R_{\eta+1}^i) + \Delta[\Sigma \Sigma(D_{\eta+2}^J R_{\eta+2}^i) - \Sigma \Sigma(D_{\eta+n+2}^J R_{\eta+n+2}^i)]}{D_x^a}.$$

Wie bekannt wurde bei Ableitung der Werte: ${}^n\Pi_x'$, ${}^n\Pi_x'$ und ${}^n\Pi_x^{\Delta'}$ vorausgesetzt, dass $\varepsilon + n = s$ eine für jedes Eintrittsalter x der Activen gleich hohe Constante sei. Bezeichnet man nun mit x_{μ} dasjenige Eintrittsalter der Activen, für welches $x_{\mu} + s = 82$ ist, so bestehen folgerichtig für

alle höheren Eintrittsalter $x = x'_\mu$ die Ungleichungen $x'_\mu + \varepsilon + n > 82$ respective $x'_\mu + \varepsilon + n + 1 > 83$. Bedenkt man, dass mit dem 82. Lebensjahre die Tafel der Activen und daher mit dem 83. Lebensjahre diejenige der im Laufe des Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Invaliden abschliesst, so hat man zu setzen:

$$J(84) = J(85) = \dots = 0 = \dots = D_{85}^J = D_{84}^J,$$

und es gelten dann für alle Eintrittsalter der Activen $x \leq x_\mu$ an Stelle der oben erwähnten folgende Formeln, welche bei der Reservenberechnung von Wichtigkeit sind:

$$\left\{ \begin{aligned} {}^\varepsilon \Pi'_{x_\mu} &= \frac{\lambda_\varepsilon D_{x_\mu+\varepsilon+1}^J R_{x_\mu+\varepsilon+1}^i + \lambda_{\varepsilon+1} D_{x_\mu+\varepsilon+2}^J R_{x_\mu+\varepsilon+2}^i + \dots + \lambda_{82-x_\mu} D_{83}^J R_{83}^i}{D_{x_\mu}^a}, \\ {}^\varepsilon \Pi'_{x_\mu} &= \frac{\lambda_\varepsilon \Sigma_{x_\mu+\varepsilon+1} + (\lambda_\varepsilon + \rho - \lambda_\varepsilon) \Sigma_{x_\mu+\varepsilon+\rho+1} + \dots + (\lambda_{82-x_\mu} - \lambda_{82-x_\mu-\rho}) \Sigma_{83}}{D_{x_\mu}^a}, \\ {}^\varepsilon \Pi_{x_\mu}^{\Delta'} &= \frac{\lambda_\varepsilon \cdot \Sigma(D_{x_\mu+\varepsilon+1}^J R_{x_\mu+\varepsilon+1}^i) + \Delta \cdot \Sigma(D_{x_\mu+\varepsilon+2}^J R_{x_\mu+\varepsilon+2}^i)}{D_{x_\mu}^a}. \end{aligned} \right.$$

Wird von Carenzjahren abgesehen, so verwandelt man sowohl die letzten drei Formeln als auch die einmaligen Prämien ${}^\varepsilon \Pi'_x$, ${}^\varepsilon \Pi'_x$ und ${}^\varepsilon \Pi_x^{\Delta'}$ in solche ohne Carenzzeit, indem man einfach $\varepsilon = 0$ setzt, beziehungsweise η mit x vertauscht. Was dann beispielsweise den Wert ${}^\varepsilon \Pi_x^{\Delta'}$ betrifft, so erhält man, wenn überdies $\Delta = \lambda_0$ ist, ohneweiters:

$$\Pi_x^{\Delta'} = \frac{\lambda_0 \cdot \left[\Sigma(D_{x+1}^J R_{x+1}^i) - \Sigma(D_{x+n+2}^J R_{x+n+2}^i) \right]}{D_x^a}.$$

In dem ganz speciellen Falle, als das Steigen des unmittelbaren Pensions- (Provisions-) Anspruches λ_0 um den jährlichen Betrag λ_0 nicht maximal bis zum n^{ten} Activitätsjahre, sondern für alle Eintrittsalter x der Activen während der ganzen Activitätszeit, d. h. eventuell bis zum 82. Lebensjahre stattfindet, insofern dieses Alter im Zustande der Activität erreicht wurde, besteht für jedes Eintrittsalter x der Activen eine Bedingungsgleichung von der Form: $x+n=82$, worin die Activitätszeit n , während welcher die Pensionen (Provisionen) steigen, eine mit dem Eintrittsalter x veränderliche Grösse, somit das höchstmögliche Pensions- (Provisions-) Ausmaß für jedes Eintrittsalter x verschieden ist. Wenn man nun im erwähnten Falle überdies $\lambda_0 = 1$ setzt, so gelangt man,

da für $x+n+2=84$ $J(84)=D_{84}^J=0$ und ebenso $\sum (D_{84}^J R_{84}^i)=0$ ist, zu dem einfachen Ausdrucke:

$$\Pi_x' = \frac{\sum (D_{x+1}^J R_{x+1}^i)}{D_x^a}.$$

Wie besonders aus den letzten Erörterungen über steigende Pensionen (Provisionen) zu ersehen ist, spielen bei den Berechnungen der einmaligen Prämien die sogenannten Doppelsummen, d. h. die Summen der Summen der Producte aus den discountirten Zahlen der im Laufe des Jahres entstandenen und zu Ende desselben noch lebenden Invaliden mit den zugehörigen jährlich-anticipativen Leibrentenwerten von 1 für Invalide eine große Rolle. Sie sind deshalb auch im „Berichte“ und zwar auf Tabelle IV, Colonne 5 angegeben worden.

Um hiernach beispielsweise für einen 25jährigen Activen den Wert des Anspruches auf eine Invalidenrente zu berechnen, welche, wenn die Invalidität schon im Laufe des ersten Versicherungsjahres eintritt in der jährlichen Höhe von 1 fl., wenn die Invalidität später erfolgt, mit jedem zurückgelegten Activitätsjahre um 1 fl. höher zu bemessen ist, hat man abzulesen:

$$\sum (D_{26}^J R_{26}^i) = 1507029, \quad D_{25}^a = 35361 \cdot 2,$$

und es ergibt sich als einmalige Prämie für diese Versicherung:

$$\Pi_{25}' = \frac{1507029}{35361 \cdot 2} = 42 \text{ fl. } 62 \text{ kr.}$$

Dieser Betrag verdoppelt, verdreifacht oder vervierfacht sich, wenn $\lambda_0 = 2, 3$ oder 4 fl. sein soll.

III. Terminliche Prämien

für Invaliditäts-Renten (Pensionen, Provisionen).

Im vorangegangenen Abschnitte wurden die gegenwärtigen Werte: $P_x, {}^e P_x, Q_x, \Pi_x, {}^e \Pi_x, {}^n \Pi_x, {}^{n'} \Pi_x, {}^{n'} \Pi_x^{\Delta}, {}^{n'} \Pi_x^{\Delta'}$ und Π_x'' auch einmalige Prämien genannt, d. h. die nach den diesbezüglichen Formeln berechneten Totalwerte wären sofort zu erlegen, wenn die betreffenden Ansprüche auf Invaliditätsrente gesichert werden sollen. In der Praxis kommt jedoch der Fall häufiger vor, dass behufs Erwerbung des Anspruches auf eine

Invalidenpension (Provision) nicht die einmaligen, sondern etwa jährliche oder monatliche Prämien in Betracht zu ziehen sind.

Um daher anzugeben, wie groß wohl solche Jahres- oder Monatsprämien sein müssen, damit ein Activer eines bestimmten Alters im Falle der Invalidität eine gewisse Leibrente beanspruchen darf, setzen wir für den Augenblick die betreffenden einmaligen Prämien als bekannt voraus und bezeichnen ganz allgemein mit:

$$\mathfrak{P}_x$$

die einmalige Prämie, welche von einem x -jährigen Activen zu erlegen ist, um irgend einen constanten oder steigenden Anspruch auf eine Invaliditätsrente zu erwerben.

Da es sich jetzt nur noch darum handelt festzusetzen, ob dem Werte \mathfrak{P}_x durch vorhinein oder nachhinein zahlbare Jahres-, beziehungsweise Monatsprämien Genüge zu leisten ist, ob diese terminlichen Prämien während der ganzen Activitätsdauer oder etwa nur durch m Jahre gezahlt werden sollen, sei

$$p_x$$

die anticipative und während der ganzen Activitätsdauer zahlbare Jahresprämie des beim Eintritte in die Versicherung x -jährigen Activen.

Wenn p_x während der ganzen Activität und immer jährlich vorhinein zu entrichten ist, so kann p_x für jeden x -jährigen Activen als Activitätsrente aufgefasst werden, indem man die im Abschnitte I dieses Paragraphes gegebene Definition der Activitätsrente dahin modificirt, dass der beim Eintritte in die Versicherung gerade x Jahre alte Active die Rente p_x während seiner Activität jährlich vorhinein nicht empfangen, sondern zahlen möge. Da durch diesen Modus im Wesen der Sache sich nichts ändert, mit

$$R_x^a$$

früher der gegenwärtige Wert einer jährlich anticipativen Activitätsrente: 1 bezeichnet wurde, so drückt das Product:

$$p_x \cdot R_x^a$$

den gegenwärtigen Wert der jährlich anticipativen Activitätsrente p_x oder im vorliegenden Falle den gegenwärtigen Wert aller erwartungsgemäß zu leistenden anticipativen Jahresprämien p_x aus. Das Product $p_x \cdot R_x^a$ ist also nur eine andere Form für die einmalige Prämie \mathfrak{P}_x , weshalb die Relation besteht:

$$p_x \cdot R_x^a = \mathfrak{P}_x,$$

und der bezeichneten Versicherung Genüge geleistet wird durch die anticipative Jahresprämie:

$$p_x = \frac{\mathfrak{P}_x}{R_x^a}$$

Soll dieselbe Versicherung mittels Zahlung anticipativer Monatsprämien erreicht werden, so nehme man an, die jährliche Summe dieser anticipativen und untereinander gleichen Monatsprämien wäre: $12 \cdot \frac{1}{12} p_x$. Bekanntlich ist der gegenwärtige Wert einer in gleichen monatlichen Pränumerandoraten zahlbaren Activitätsrente von jährlich 1:

$$\frac{12}{12} R_x^a = R_x^a - \delta$$

und bei 4procentiger Verzinsung:

$$\frac{12}{12} R_x^a = R_x^a - 0.465.$$

Als gegenwärtiger Wert einer in gleichen anticipativen Monatsraten zahlbaren Activitätsrente von jährlich $12 \cdot \frac{1}{12} p_x$ ergibt sich also:

$$12 \cdot \frac{1}{12} p_x \cdot \frac{12}{12} R_x^a = 12 \cdot \frac{1}{12} p_x \cdot (R_x^a - \delta) = \mathfrak{P}_x,$$

oder die anticipative Monatsprämie für die obige Versicherung:

$$\frac{1}{12} p_x = \frac{\mathfrak{P}_x}{12 (R_x^a - \delta)}.$$

Nach den im Abschnitte I enthaltenen Entwicklungen ist es leicht, die entsprechenden Ausdrücke für die postnumerando zahlbaren Prämien anzuführen. Man erhält für postnumerando zahlbare Jahresprämien p'_x die Formel:

$$p'_x = \frac{\mathfrak{P}_x}{R_x^a - 1}$$

und für die postnumerando zahlbaren Monatsprämien $\frac{1}{12} p'_x$ die

Beziehung:

$$\frac{1}{12} p'_x = \frac{\mathfrak{P}_x}{12 \left(R_x^a - \delta - \frac{1}{12} \right)} = \frac{\mathfrak{P}_x}{12 (R_x^a - 0.548)}.$$

In dem Falle, als die Prämienzahlung eines x -jährigen Activen maximal nur m Activitätsjahre dauern oder, was dasselbe ist, nach maximal m Activitätsjahren aufhören soll, wird man zur Berechnung von p_x an Stelle von R_x^a den baaren Wert ${}^m\mathfrak{R}_x^a$ einer nach m Jahren aufhörenden und während dieser Zeit jährlich vorhinein zahlbaren Activitätsrente von 1 verwenden, und bei Ableitung von ${}_1p_x$ den Wert ${}_1\frac{R_x^a}{12}$ mit ${}_1\frac{{}^m\mathfrak{R}_x^a}{12}$ vertauschen müssen.

Dasselbe gilt natürlich von den postnumerando zahlbaren Prämien p'_x und ${}_1p'_x$, nur dass für $R_x^{a'}$ und ${}_1\frac{R_x^{a'}}{12}$ beziehungsweise gesetzt wird ${}^m\mathfrak{R}_x^{a'}$ und ${}_1\frac{{}^m\mathfrak{R}_x^{a'}}{12}$.

Bisher wurde unter \mathfrak{P}_x ganz allgemein irgend eine einmalige Prämie verstanden. Gesetzt den Fall, es wäre:

$$\mathfrak{P}_x = P_x = \frac{\Sigma (D_{x+1}^J R_{x+1}^i)}{D_x^a},$$

so erhält man als anticipative und während der ganzen Activität zahlbare Jahresprämie:

$$p_x = p_x = \frac{P_x}{R_x^a}$$

oder, wenn man bedenkt, dass

$$R_x^a = \frac{\Sigma D_x^a}{D_x^a}$$

ist, auch den Ausdruck:

$$p_x = \frac{\Sigma (D_{x+1}^J R_{x+1}^i)}{\Sigma D_x^a}.$$

Da P_x ein Näherungswert ist, muss auch p_x ein solcher sein. P_x und p_x liegen ihren wahren Werten, wie aus früheren Behauptungen hervorgeht, jedenfalls so nahe, dass man sagen kann:

„ p_x ist die anticipative und während der ganzen Activitätsdauer eines x -jährigen Activen zahlbare Jahresprämie zur Erwerbung des unmittelbaren Anspruches auf die Invaliditätsrente vom jährlichen Ausmaße: 1.“

Nach dieser Formel und auf Grund der für die österreichischen Bergarbeiter gültigen Fundamentalzahlen wurden im „Berichte“ unter Voraussetzung eines 4procentigen Zinsfußes die auf Tab. IV, Col. 7

befindlichen Jahresprämien für jedes in Betracht kommende Alter der Activen berechnet. Ein 25jähriger Activer, welcher den Anspruch auf eine Invaliditätsrente vom jährlichen Ausmaße: 100 fl. zu erwerben trachtet, hätte hiernach die anticipative, jährliche Prämie:

$$p_{25} = 100 \cdot \frac{\Sigma D_{26}^J R_{26}^I}{\Sigma D_{25}^a} = 100 \cdot \frac{53866 \cdot 0}{605109 \cdot 0} = 8 \text{ fl. } 90 \text{ kr.}$$

zu zahlen.

§. 4.

Lebenswahrscheinlichkeit, Activitätswahrscheinlichkeit.

Wenn von 100.000 fünfzehnjährigen Männern jeder Einzelne nach Ablauf eines Jahres das Capital von 1 fl. erhalten will, im Falle er diesen Zeitraum überlebt, so hat er beim Eintritt in diese Versicherung nach §. 3, Abschnitt I unter Voraussetzung eines 4procentigen Zinsfußes: $\frac{99465}{100000} \cdot 1 \cdot 04$ fl. zu zahlen. Gleicherweise hat er, wenn er die Auszahlung desselben Capitales nach Ablauf von 2, 3 oder m Jahren beansprucht, beziehungsweise die folgenden Beiträge:

$$\frac{98926}{100000} \cdot 1 \cdot 04 \text{ fl.}, \quad \frac{98383}{100000} \cdot 1 \cdot 04 \text{ fl.} \text{ oder } \frac{\mathfrak{L}(15+m)}{\mathfrak{L}(15)} \cdot 1 \cdot 04 \text{ fl.}$$

zu leisten.

Man erkennt ohneweiters, dass diese Einzahlungen kleiner sind, als wenn der absolute Anspruch auf das Capital von 1 fl. erhoben wird; diese Erscheinung erklärt sich jedoch sofort, wenn man überlegt, dass nach 1, 2, 3 oder m Versicherungsjahren nicht genau 100000 Ansprüchen, sondern eben nur so vielen zu genügen ist, als Überlebende (Empfänger) noch vorhanden sind. Die Einzahlung eines Fünfzehnjährigen für den bedingungsweisen Anspruch ist also jener Bruchtheil der Einzahlung für den absoluten Anspruch, welcher der Wahrscheinlichkeit der Zahlungsleistung entspricht.

Nach der Sterblichkeitstafel erreichen von 100000 fünfzehnjährigen „Männern überhaupt“ nur 99465 das sechzehnte Lebensjahr, und man kann annehmen, dass für jeden Fünfzehnjährigen dieselbe Wahrscheinlichkeit vorhanden ist, zu den Überlebenden zu gehören. Wenn sich also 99465 mögliche Fälle auf 100000 Männer vertheilen, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit, welche einen einzigen Fünfzehnjährigen betrifft, durch $\frac{99465}{100000}$ messen, und diesen Bruch nennt man kurzweg die Wahrscheinlichkeit, dass

ein fünfzehnjähriger Mann das 16. Lebensjahr erreicht. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fünfzehnjähriger das 17., 18. oder $(15+m)^{te}$ Lebensjahr erlebt, beziehungsweise $\frac{98926}{100000}$, $\frac{98383}{100000}$ oder $\frac{\mathfrak{L}(15+m)}{\mathfrak{L}(15)}$, und allgemein bezeichnet man mit:

$${}_m w_x = \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{\mathfrak{L}(x)}$$

die Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen Mannes, noch m Jahre zu leben, wobei $\mathfrak{L}(x+m)$ und $\mathfrak{L}(x)$ die Zahlen der Lebenden in der Absterbeordnung für „Männer überhaupt“ vorstellen.

Da man sich die Zahlen der lebenden Männer durch die Zahlen irgend einer anderen Absterbeordnung ersetzt denken kann, so gilt die Formel für die Lebenswahrscheinlichkeit ${}_m w_x$ ganz allgemein für jede Absterbeordnung.

Aus der Lebenswahrscheinlichkeit ${}_m w_x$ lässt sich sofort die sogenannte Sterbenswahrscheinlichkeit ${}_m w'_x$ ableiten, wenn man überlegt, dass die innerhalb des Zeitraumes von m Jahren Gestorbenen durch die Differenz:

$$\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+m)$$

dargestellt werden, also $\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+m)$ Möglichkeiten, zu den Sterbenden zu gehören, vorhanden sind. Die gleichmäßige Vertheilung dieser Möglichkeiten auf $\mathfrak{L}(x)$ Lebende ergibt dann:

$${}_m w'_x = \frac{\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+m)}{\mathfrak{L}(x)} = 1 - \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{\mathfrak{L}(x)} = 1 - {}_m w_x$$

als Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen Mannes binnen m Jahren zu sterben.

Verwendet man anstatt der Anzahl der Lebenden: $\mathfrak{L}(x)$, $\mathfrak{L}(x+1)$, $\mathfrak{L}(x+2)$, $\mathfrak{L}(x+3)$, ... $\mathfrak{L}(x+m)$, ... einer Absterbeordnung die Anzahl der lebenden Activen: $A(x)$, $A(x+1)$, $A(x+2)$, $A(x+3)$, ... $A(x+m)$, ..., wie sie die Tafel der Activen angibt, und stellt man ähnliche Betrachtungen wie oben an, so gelangt man zu:

$${}_m w_x^{(a)} = \frac{A(x+m)}{A(x)}$$

als Wahrscheinlichkeit für einen x -jährigen Activen, noch m Jahren activ zu sein. Man nennt ${}_m w_x^{(a)}$ daher die Activitätswahrscheinlichkeit, während:

$${}_m w_x^{(a)'} = 1 - \frac{A(x+m)}{A(x)} = 1 - {}_m w_x^{(a)}$$

die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, nämlich die, nach m Jahren nicht mehr activ zu sein, vorstellt.

Es handle sich weiter um das Leben und Sterben von Männern und Frauen, welche beispielsweise als Ehepaare mit einander verbunden sind. Wir bezeichnen mit: $\mathfrak{L}(x)$, $\mathfrak{L}(x+1)$, $\mathfrak{L}(x+2)$, $\mathfrak{L}(x+3)$, . . . $\mathfrak{L}(x+m)$, . . . die Absterbeordnung der „Männer überhaupt“, mit: $L(y)$, $L(y+1)$, $L(y+2)$, $L(y+3)$, . . . $L(y+m)$, . . . jene der Frauen. Tritt also zu der obigen Bedingung für die Auszahlung des Capitals von 1 fl. nach m Jahren noch diejenige hinzu, dass außer einem x -jährigen Manne auch seine y -jährige Frau diesen Zeitraum überlebe, so wird der gegenwärtige Wert des Capitals von 1 fl. für einen x -jährigen Mann:

$$\frac{\mathfrak{L}(x+m)}{\mathfrak{L}(x)} \cdot 1 \cdot 04^{-m} \text{ fl.}$$

jedenfalls verringert; denn nach der Tafel der lebenden Frauen ist die Wahrscheinlichkeit des Empfanges nach m Jahren nur $L(y+m)$ mal vorhanden, und vertheilen sich die $L(y+m)$ Möglichkeiten, zu den Überlebenden zu gehören, auf $L(y)$ Frauen, d. h. der gegenwärtige Wert von 1 fl. ist unter der Doppelbedingung, dass das Ehepaar m Jahre überlebe:

$$\frac{\mathfrak{L}(x+m)}{\mathfrak{L}(x)} \cdot \frac{L(y+m)}{L(y)} \cdot 1 \cdot 04^{-m} \text{ fl.}$$

Also das Resultat, welches der ersten Bedingung entspricht, muss mit dem Bruche multiplicirt werden — welcher der zweiten Bedingung Genüge leistet. Man nennt daher allgemein:

$${}_m w_{x,y} = \frac{\mathfrak{L}(x+m)L(y+m)}{\mathfrak{L}(x)L(y)}$$

die Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen Mannes und einer y -jährigen Frau noch m Jahre gleichzeitig zu leben oder kurz die Lebenswahrscheinlichkeit eines Ehepaares für m Jahre und sagt dann auch: „Von $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaaren, bei denen die Männer x , die Frauen y Jahre alt sind, leben nach Ablauf von m Jahren erwartungsgemäß noch $\mathfrak{L}(x+m) \cdot L(y+m)$ Ehepaare.“

Kommen nur solche Ehepaare in Betracht, bei denen der Mann sich in Activität befindet, so hat man in den letzten Entwicklungen an Stelle der Absterbeordnung der „Männer überhaupt“ die Tafel der Activen: $A(x)$, $A(x+1)$, $A(x+2)$, $A(x+3)$, . . . $A(x+m)$, . . . zu substituiren, und es ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger Mann als Activer mit seiner y -jährigen Frau noch m Jahre gleichzeitig lebt:

$${}_m w_{x,y}^{(a)} = \frac{A(x+m) \cdot L(y+m)}{A(x)L(y)}.$$

Auf dieser Formel beruht der Satz: „Von $A(x)L(y)$ Ehepaaren, bei denen die Männer activ und x Jahre alt, die Frauen y Jahre alt sind, leben nach Ablauf von m Jahren erwartungsgemäß noch $A(x+m)L(y+m)$ Ehepaare, bei denen die Männer activ bleiben.“

§. 5.

Wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer, wahrscheinliche und mittlere Activitätsdauer.

Die Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen Mannes, noch m Jahre zu leben, ist wie bekannt:

$${}_m w_x = \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{\mathfrak{L}(x)},$$

während die Wahrscheinlichkeit, binnen m Jahren zu sterben, durch:

$${}_m w'_x = 1 - \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{\mathfrak{L}(x)}$$

ausgedrückt wird.

Es gibt nun für jede Altersklasse x einen Zeitraum von $m=\xi$ Jahren, für welchen es ebenso wahrscheinlich ist, dass der x -jährige Mann innerhalb desselben sterbe, als dass der Genannte nach Ablauf jener ξ Jahre noch lebe. Wenn man diesen Grad von Ungewissheit, welcher in beiden Fällen gleich groß ist, durch die Gleichung:

$${}_{\xi} w_x = {}_{\xi} w'_x$$

andeutet, so erhält man hiefür die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{L}(x+\xi)}{\mathfrak{L}(x)} = 1 - \frac{\mathfrak{L}(x+\xi)}{\mathfrak{L}(x)}$$

oder:

$$\mathfrak{L}(x+\xi) = \frac{\mathfrak{L}(x)}{2},$$

und nennt dann ξ die wahrscheinliche Lebensdauer eines x -jährigen Mannes. Ist also x , respective $\mathfrak{L}(x)$ bekannt, so berechnet sich $\mathfrak{L}(x+\xi)$ sofort. Die Differenz ξ der beiden Alter von $x+\xi$ und x Jahren, zu welcher man gelangt, wenn man die Anzahl $\mathfrak{L}(x+\xi)$ lebender Männer in der Absterbeordnung aufsucht, ist die gewünschte wahrscheinliche Lebensdauer.

Für $x=25$ hat man beispielsweise (siehe Tafel II des Anhanges):

$$\mathfrak{L}(25) = 94455 \text{ Männer;}$$

es ergibt sich also:

$$\mathfrak{L}(25+\xi) = 47227.5 \text{ Männer.}$$

Da die Anzahl: 47227.5 Lebende in der Absterbeordnung für Männer auf das Alter zwischen 64 und 65 Jahren hinweist, so berechnet sich die wahrscheinliche Lebensdauer eines 25jährigen Mannes mit:

$$\xi = 64.3 - 25 = 39.3 \text{ Jahren.}$$

Analog wie im Vorangegangenen kann man die wahrscheinliche Lebensdauer einer y -jährigen Frau oder eines x -jährigen Invaliden, endlich die sogenannte wahrscheinliche Aktivitätsdauer ξ' eines x -jährigen Activen, u. zw. letztere mit Hilfe der Relation:

$$A(x+\xi') = \frac{A(x)}{2}$$

bestimmen.

Was nun die mittlere Lebensdauer und die mittlere Aktivitätsdauer anbelangt, so ist die erstere von der wahrscheinlichen Lebensdauer, die letztere von der wahrscheinlichen Aktivitätsdauer wohl zu unterscheiden, und soll die folgende kurze Betrachtung veranschaulichen, was unter den genannten Begriffen zu verstehen ist.

Wenn von $\mathfrak{L}(x)$ Männern, welche das Alter x erfüllen, nach Ablauf von 1, 2, 3, ... m , ... Jahren beziehungsweise noch $\mathfrak{L}(x+1)$, $\mathfrak{L}(x+2)$, $\mathfrak{L}(x+3)$, ... $\mathfrak{L}(x+m)$, ... tafelmäßig vorhanden sind und angenommen wird, dass die Todesfälle, welche in den einzelnen Jahren in Betracht kommen, immer auf das Ende eines Jahres fallen, so durchleben $\mathfrak{L}(x)$ Männer zuerst je ein Jahr, also zusammen $\mathfrak{L}(x)$ Jahre; da nach einem Jahre aber nur noch $\mathfrak{L}(x+1)$ Männer am Leben sind, so durchleben dieselben $\mathfrak{L}(x+1)$ Jahre u. s. f. bis zum höchsten Alter. Demnach durchleben $\mathfrak{L}(x)$ x -jährige Männer künftig im Ganzen:

$$\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(x+1) + \mathfrak{L}(x+2) + \mathfrak{L}(x+3) + \dots + \mathfrak{L}(x+m) + \dots$$

Jahre, und auf einen x -jährigen Mann entfallen durchschnittlich:

$$\frac{\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(x+1) + \mathfrak{L}(x+2) + \mathfrak{L}(x+3) + \dots + \mathfrak{L}(x+m) + \dots}{\mathfrak{L}(x)} = \frac{\Sigma \mathfrak{L}(x)}{\mathfrak{L}(x)}$$

Jahre.

Man nennt im Allgemeinen: $\frac{\Sigma \mathfrak{L}(x)}{\mathfrak{L}(x)}$ die mittlere Lebensdauer eines x -jährigen Mannes, und finden sich diese Quotienten auf Tafel II, Colonne 3 des Anhanges für jedes Mannesalter berechnet vor. Weiters enthält Tafel III, Colonne 3 des Anhanges in Jahren angegeben die mittlere Lebensdauer der Frauen und der „Bericht“ auf Tabelle III, Colonne 3 die mittlere Lebensdauer der Invaliden.

Wie aus der gemachten Annahme hervorgeht, sind die so gefundenen Zahlen der mittleren Lebensdauer für Männer, Frauen und Invalide nicht ganz genau, denn die Todesfälle erfolgen nicht am Ende eines Jahres, sondern sie vertheilen sich beinahe gleichmäßig über den Zeitraum je eines Jahres. Um daher die obigen Zahlen zweckentsprechend corrigiren zu können, stelle man sich vor, die Sterbefälle eines Jahres ereigneten sich insgesamt in der Mitte des Jahres. In diesem Falle kämen:

für $\mathfrak{L}(x)$	Männer nur	$\mathfrak{L}(x)$	$-\frac{\mathfrak{L}(x)-\mathfrak{L}(x+1)}{2}$	Jahre,
„ $\mathfrak{L}(x+1)$	„	„ $\mathfrak{L}(x+1)$	$-\frac{\mathfrak{L}(x+1)-\mathfrak{L}(x+2)}{2}$	„ ,
„ $\mathfrak{L}(x+2)$	„	„ $\mathfrak{L}(x+2)$	$-\frac{\mathfrak{L}(x+2)-\mathfrak{L}(x+3)}{2}$	„ ,
„ $\mathfrak{L}(x+3)$	„	„ $\mathfrak{L}(x+3)$	$-\frac{\mathfrak{L}(x+3)-\mathfrak{L}(x+4)}{2}$	„ ,
„	„	„	„	„
„ $\mathfrak{L}(x+m)$	„	„ $\mathfrak{L}(x+m)$	$-\frac{\mathfrak{L}(x+m)-\mathfrak{L}(x+m+1)}{2}$	„ u. s. f.,
d. h. „ $\Sigma \mathfrak{L}(x)$	„	„ $\Sigma \mathfrak{L}(x)$	$-\frac{\Sigma \mathfrak{L}(x)-\Sigma \mathfrak{L}(x+1)}{2}$	$= \Sigma \mathfrak{L}(x) - \frac{\mathfrak{L}(x)}{2}$

Jahre in Betracht. Bezeichnet man demnach mit t_x die corrigirte mittlere Lebensdauer eines x -jährigen Mannes, so ist:

$$t_x = \frac{\Sigma \mathfrak{L}(x) - \frac{\mathfrak{L}(x)}{2}}{\mathfrak{L}(x)} = \frac{\Sigma \mathfrak{L}(x)}{\mathfrak{L}(x)} - \frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

Man erhält hiernach einen genaueren Wert für die mittlere Lebensdauer eines Mannes, einer Frau oder eines Invaliden, wenn man die oben berechneten Zahlen um $\frac{1}{2}$ Jahr vermindert.

Nach dem Vorangegangenen ist es nunmehr leicht, die mittlere Activitätsdauer darzustellen. Es wird nur noch erwähnt, dass

sich die Quotienten $\frac{\Sigma A(x)}{A(x)}$ im „Berichte“ auf Tabelle II, Colonne 3 vorfinden, und für die corrigirte mittlere Activitätsdauer $t_x^{(a)}$ eines x -jährigen Activen die Relation besteht:

$$t_x^{(a)} = \frac{\Sigma A(x)}{A(x)} - \frac{1}{2}$$

Jahre, wobei sich $t_x^{(a)}$ auf die Voraussetzung gründet, dass nicht allein alle Todesfälle der Activen, sondern auch alle Invalidisirungen in der Mitte des Jahres stattfinden.

Die mittlere und wahrscheinliche Lebens- (Activitäts-) Dauer dient zur Beurtheilung der Sterblichkeits- und Invaliditätsverhältnisse, besonders zum Vergleiche der aus verschiedenen Beobachtungen erhaltenen Daten. Zur Berechnung der Werte von Renten und Anwartschaften sind diese Zahlen nicht verwendbar.

§. 6.

Rentenversicherung verbundener Personen.

I. Verbindungsrenten.

Wird einem Ehepaare eine Rente solange gewährt, als beide, Mann und Frau, noch leben, so wird diese Rente eine Verbindungsrente genannt.

Will man den gegenwärtigen Wert $R_{x,y}$ einer jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1 für ein Ehepaar berechnen, bei welchem der Mann x Jahre, die Frau y Jahre alt ist, so stelle man sich vor: $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaare würden in die bezeichnete Versicherung eintreten. In diesem Falle kommen sofort $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Renten von 1, d. h. der Betrag $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ zur Auszahlung, und da gemäß §. 4 nach m Jahren noch $\mathfrak{L}(x+m) \cdot L(y+m)$ Ehepaare am Leben sind, so werden der Reihe nach zu Beginn der aufeinander folgenden Versicherungsjahre die Beträge: $\mathfrak{L}(x+1) \cdot L(y+1)$, $\mathfrak{L}(x+2) \cdot L(y+2)$, $\mathfrak{L}(x+3) \cdot L(y+3)$ u. s. f. bis zum höchsten Alter auszu zahlen sein. Die gegenwärtigen Werte dieser verschiedenen Renten zahlungen stellen sich, wie folgt, dar:

$$\mathfrak{L}(x) \cdot L(y), \frac{\mathfrak{L}(x+1) \cdot L(y+1)}{q}, \frac{\mathfrak{L}(x+2) \cdot L(y+2)}{q^2}, \frac{\mathfrak{L}(x+3) \cdot L(y+3)}{q^3}, \dots$$

$$\dots \frac{\mathfrak{L}(x+m) \cdot L(y+m)}{q^m}, \dots$$

und die Summe der vorstehenden Werte gibt den Gesamtbetrag an, welcher zum Zwecke jener Versicherung von $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaaren erlegt werden muß. Sonach entfällt auf ein Ehepaar im beziehungsweisen Alter von x und y Jahren als Theilbetrag:

$$R_{x,y} = \frac{\mathfrak{L}(x) \cdot L(y) + \frac{\mathfrak{L}(x+1) \cdot L(y+1)}{q} + \frac{\mathfrak{L}(x+2) \cdot L(y+2)}{q^2} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x+m) \cdot L(y+m)}{q^m} + \dots}{\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)}$$

d. i. der gegenwärtige Wert einer jährlich anticipativen Verbindungsrente: 1, zahlbar auf die Dauer des gleichzeitigen Lebens eines x -jährigen Mannes und einer y -jährigen Frau.

Man gibt dem gefundenen Ausdrucke gewöhnlich eine für die Ausrechnung von $R_{x,y}$ bequemere Form, indem man entweder die discountirten Zahlen der lebenden Männer oder jene der lebenden Frauen einführt; wir wählen das Erstere und schreiben, nachdem Zähler und Nenner von $R_{x,y}$ durch q^x dividirt wurden:

$$\frac{\mathfrak{L}(x)}{q^x} = D_x, \quad \frac{\mathfrak{L}(x+1)}{q^{x+1}} = D_{x+1}, \quad \frac{\mathfrak{L}(x+2)}{q^{x+2}} = D_{x+2}, \quad \frac{\mathfrak{L}(x+3)}{q^{x+3}} = D_{x+3}, \dots$$

$$\dots \frac{\mathfrak{L}(x+m)}{q^{x+m}} = D_{x+m}, \dots$$

bis zum höchsten in Betracht kommenden Alter. Den früheren Entwicklungen analog kann man:

$$D_x \cdot L(y) + D_{x+1} \cdot L(y+1) + D_{x+2} \cdot L(y+2) + D_{x+3} \cdot L(y+3) + \dots + D_{x+m} \cdot L(y+m) + \dots = \Sigma (D_x \cdot L(y))$$

setzen, und es ergibt sich auf diese Weise:

$$R_{x,y} = \frac{\Sigma (D_x \cdot L(y))}{D_x \cdot L(y)}.$$

Die so erhaltene einfache Relation wurde benutzt, um die im Anhang auf Tafel VI(a) sich vorfindenden gegenwärtigen Werte der jährlich anticipativen Verbindungsrenten von 1 für die erfahrungsgemäß vorkommenden Alterscombinationen der Männer und Frauen, u. zw. auf Grund der Mortalitätstafeln von Brune-Fischer und eines 4⁰/₀igen Zinsfußes zu berechnen.

Da beispielsweise für $x = 92$ und $y = 87$ Jahre:

$$R_{92, 87} = \frac{D_{92} \cdot L(87) + D_{93} \cdot L(88) + D_{94} \cdot L(89)}{D_{92} \cdot L(87)}$$

und:

$$D_{92} \cdot L(87) = 7828 \cdot 81$$

$$D_{93} \cdot L(88) = 2142 \cdot 39$$

$$D_{94} \cdot L(89) = 518 \cdot 924$$

ist, so ergibt sich:

$$R_{92, 87} = \frac{10490 \cdot 124}{7828 \cdot 81} = 1 \cdot 3399,$$

d. h. für ein Ehepaar, bei welchem der Mann 92, die Frau 87 Jahre alt ist, berechnet sich der baare Wert einer jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1 fl. mit 1 fl. 34 kr. öst. Währ.

In den bisherigen Erörterungen über Verbindungsrenten wurde bei der Berechnung von $R_{x, y}$ die allgemeine Absterbeordnung der Männer (siehe Taf. I, Col. 2 des Anhanges) benützt, d. h. ein Unterschied zwischen activen und invaliden Männern nicht gemacht.

Beziehen sich die Rentenzahlungen nur auf solche Ehepaare, bei denen die Männer sich in Activität befinden, sind also Verbindungsrenten im jährlichen Betrage: 1 einem Ehepaare nur solange zu gewähren, als active Männer, und zwar als solche mit ihren Frauen vereint leben, so hat man in der obigen Formel an Stelle der discountirten Zahlen der „Männer überhaupt“ die discountirten Zahlen der Activen zu substituiren. Denn nach §. 4 leben von $A(x) \cdot L(y)$ Ehepaaren, bei denen die Männer activ und x Jahre alt, die Frauen y Jahre alt sind, nach m Jahren noch $A(x + m) \cdot L(y + m)$ Ehepaare, von welchen die Männer in Activität verbleiben; es ist sonach der gegenwärtige Wert $R_{x, y}^a$ einer jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1, zahlbar, solange ein x -jähriger Activer und als solcher gleichzeitig mit seiner y -jährigen Frau lebt:

$$R_{x, y}^a = \frac{\Sigma (D_x^a \cdot L(y))}{D_x^a \cdot L(y)}.$$

Dem zufolge sichert $R_{x, y}^a$ einen jährlichen Rentenbezug: 1, welcher mit dem Ableben eines der beiden Ehegatten oder, wenn die Frau solange am Leben bleibt, mit dem Eintritte der Invalidität des Activen aufhört.

Die auf Tafel VI(b) des Anhanges verzeichneten Werte wurden nach der angegebenen Formel berechnet, und es soll ein einfaches Beispiel den diesbezüglichen Vorgang zeigen. Da es im vorliegenden Falle jedoch

nicht darauf ankommt, gerade ein Beispiel zu wählen, welches in Wirklichkeit oft vorkommt, sondern da es sich nur um das Wesen der Sache handelt, so nehmen wir, obwohl bei Abschluss diesbezüglicher Versicherungen das Alter der Activen selten 50 Jahre übersteigen dürfte, um im Beispiel die Rechnung abzukürzen, $x = 80$ und $y = 75$ Jahre an. Nun ist, da vorausgesetzt wird, dass die Werte $\log D_x^a$ und $\log L(y)$ ein für alle Male berechnet vorliegen:

$$\begin{aligned}\log D_{80}^a \cdot L(75) &= 0.9657156 & + 4.3564083 &= 5.3221239, \\ \log D_{81}^a \cdot L(76) &= 0.4654007 & + 4.3093107 &= 4.7747114, \\ \log D_{82}^a \cdot L(77) &= 0.6824506 & - 1 + 4.2583499 &= 3.9408005,\end{aligned}$$

folglich erhält man:

$$\begin{aligned}R_{80, 75}^a &= \frac{D_{80}^a \cdot L(75) + D_{81}^a \cdot L(76) + D_{82}^a \cdot L(77)}{D_{80}^a \cdot L(75)} = \\ &= \frac{209953.9 + 59526.64 + 8725.704}{209953.9} = \frac{278206.2}{209953.9} = 1.3251.\end{aligned}$$

Wird demnach jährlich vorhinein die Verbindungsrente von 100 fl. und solange bezogen, als der 80-jährige Active und als solcher gleichzeitig mit seiner 75-jährigen Frau lebt, so ist beim Eintritt in diese Versicherung von dem Ehepaare der Betrag von 132 fl. 51 kr. zu erlegen.

Gelangen Verbindungsrenten nicht jährlich vorhinein sondern jährlich nachhinein zur Auszahlung, so ergeben sich bekanntlich die Werte:

$$R'_{x, y} = R_{x, y} - 1$$

und:

$$R_{x, y}^{af} = R_{x, y}^a - 1,$$

weil in diesem Falle die erste fällige Rente: 1, welche bei anticipativer Zahlung sofort beim Eintritt in die Versicherung gewährt werden muss, wegfällt.

Sind Verbindungsrenten weiters in mehr als einer Rate, wie z. B. in 2, 4 oder in 12 gleich hohen Raten jährlich auszufolgen, so kann man behufs Berechnung der diesbezüglichen gegenwärtigen Werte ähnliche Überlegungen wie im §. 3, Abschnitt I anstellen und nachweisen, dass man bei monatlicher Ratenzahlung und einem Zinsfuß von 4% nur nöthig hat, die gegenwärtigen Werte der jährlich anticipativen Verbindungsrenten: 1 durch die schon bekannte Größe δ zu corrigiren.

II. Überlebensrenten.

(Witwen-Renten, -Pensionen, -Provisionen.)

Wird die Bestimmung getroffen, dass, im Falle von einem Ehepaare der Mann früher stirbt, die ihn überlebende Frau vom Tode des Mannes angefangen bis zum eigenen Ableben eine Rente zu beziehen hat, so nennt man diese Rente eine Überlebensrente (Witwen-Rente, -Pension, -Provision).

Angenommen von $\mathfrak{L}(x)$ x -jährigen Männern stirbt im Laufe von m Jahren nicht ein Einziger, so müssten von $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaaren, in welchen die Frauen y Jahre alt sind, nach Ablauf von m Jahren noch:

$$\mathfrak{L}(x) \cdot L(y+m)$$

Ehepaare leben. Thatsächlich leben aber, wie bekannt, von $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaaren nach m Jahren noch:

$$\mathfrak{L}(x+m) \cdot L(y+m)$$

Ehepaare, denn es sterben von $\mathfrak{L}(x)$ x -jährigen Männern im Laufe von m Jahren:

$$\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+m)$$

Männer, sonach leben aus $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaaren hervorgegangen nach m Jahren:

$$[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+m)] \cdot L(y+m)$$

Witwen.

Obwohl sich die Todesfälle der Männer immer über den Zeitraum eines ganzen Jahres vertheilen, stellen wir uns zum Zwecke der folgenden näherungsweisen Berechnung des gegenwärtigen Wertes $U_{x,y}$ eines Anspruches auf die jährliche Witwenrente von 1 vor, dass die Männer am Ende eines Jahres absterben. Sollen die so entstehenden Witwen vom Beginn der Witwenschaft an bis zu ihrem Ableben je die constante jährliche Rente: 1 geniessen, so sind nach 1, 2, 3, ... m , ... Jahren immer gerade sovielen Renteneinheiten fällig, als nach Ablauf der einzelnen Jahre Witwen leben. Der gegenwärtige Wert aller dieser Rentenzahlungen beträgt demnach:

$$\frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)] \cdot L(y+1)}{q} + \frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+2)] \cdot L(y+2)}{q^2} +$$

$$+ \frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+3)] \cdot L(y+3)}{q^3} + \dots + \frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+m)] \cdot L(y+m)}{q^m} + \dots,$$

und auf ein einzelnes Ehepaar von den in die Versicherung eingetretenen $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaaren entfällt die Quote:

$$U_{x,y} = \frac{\frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)] \cdot L(y+1)}{q} + \frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+2)] \cdot L(y+2)}{q^2} + \frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+3)] \cdot L(y+3)}{q^3} + \dots + \frac{[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+m)] \cdot L(y+m)}{q^m} + \dots}{\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)},$$

worin der Zähler bis zur höchsten in Betracht kommenden Alterscombination der Ehepaare fortzusetzen ist.

Mit Rücksicht auf das Vorangegangene lässt sich der letzte Ausdruck einfacher schreiben, wenn man im Zähler von $U_{x,y}$ das Anfangsglied:

$$[\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x)] \cdot L(y) = 0$$

hinzufigt, wodurch der Wert von $U_{x,y}$ sich keinesfalls ändert. Multiplicirt man hierauf aus, so wird:

$$U_{x,y} = \frac{L(y) + \frac{L(y+1)}{q} + \frac{L(y+2)}{q^2} + \frac{L(y+3)}{q^3} + \dots + \frac{L(y+m)}{q^m} + \dots}{L(y)} - \frac{\mathfrak{L}(x) \cdot L(y) + \frac{\mathfrak{L}(x+1) \cdot L(y+1)}{q} + \frac{\mathfrak{L}(x+2) \cdot L(y+2)}{q^2} + \dots + \frac{\mathfrak{L}(x+m) \cdot L(y+m)}{q^m} + \dots}{\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)},$$

und wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruches durch q^y , Zähler und Nenner des zweiten Bruches durch q^x dividirt, so ergibt sich nach Einführung der Buchstabenzeichen für die discountirten Zahlen der lebenden Frauen und derjenigen der lebenden „Männer überhaupt“ sofort:

$$U_{x,y} = \frac{\Sigma D_y}{D_y} - \frac{\Sigma (D_x \cdot L(y))}{D_x \cdot L(y)}.$$

Da nun aber $\frac{\Sigma D_y}{D_y}$ nichts anderes als den gegenwärtigen Wert der jährlich anticipativen Leibrente: 1 einer y -jährigen Frau, und

$$\frac{\Sigma (D_x \cdot L(y))}{D_x \cdot L(y)}$$

den gegenwärtigen Wert der jährlich anticipativen Verbindungsrente: 1 für einen x -jährigen Mann und eine y -jährige Frau vorstellt, so hat man kurzweg die Gleichung:

$$U_{x,y} = R_y - R_{x,y},$$

das heißt: „Ist von einem Ehepaare der Mann x , seine Frau y Jahre alt, so gelangt man zum gegenwärtigen Werte (zur einmaligen Prämie) des Anspruches auf die Witwen-Rente (-Pension, -Provision) von jährlich 1, indem man die Differenz zwischen dem gegenwärtigen Werte der jährlich anticipativen Leibrente: 1 für die y -jährige Frau und dem gegenwärtigen Werte der jährlich anticipativen Verbindungsrente: 1 des betreffenden Ehepaares bildet.“

Auf die beschriebene Art wurden die in Tafel VII des Anhanges sich vorfindenden Werte von $U_{x,y}$, u. zw. auf Grund der Brune-Fischer'schen Mortalitätstafeln und eines 4⁰/₀igen Zinsfußes berechnet.

Wird beim Eintritt in die Versicherung vorausgesetzt, dass ε Jahre des ehelichen Zusammenlebens vorübergehen müssen, ehe die Pensions- (Provisions-) Fähigkeit der Frau beginnt, so heißt dies mit anderen Worten, dass alle in den ersten ε Jahren der Versicherung entstandenen Witwen leer ausgehen, und nur diejenigen Witwen zur Pensionierung (Provisionierung) gelangen, welche später aus den nach ε Jahren noch lebenden Ehepaaren hervorgehen.

Treten $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaare vom beziehungsweisen Alter x und y in die Versicherung ein, so leben hievon nach ε Jahren noch:

$$\mathfrak{L}(x+\varepsilon) \cdot L(y+\varepsilon)$$

Ehepaare, und von den aus diesen Ehepaaren hervorgegangenen Witwen leben allgemein nach $\varepsilon+m$ Jahren noch:

$$[\mathfrak{L}(x+\varepsilon) - \mathfrak{L}(x+\varepsilon+m)] \cdot L(y+\varepsilon+m)$$

Witwen. Bezeichnet man den gegenwärtigen Wert eines derart aufgeschobenen Anspruches auf Witwenpension (-Provision) von jährlich 1 mit ${}^{\varepsilon}U_{x,y}$, so erhält man der Analogie mit dem Früheren zufolge:

$$\begin{aligned} {}^{\varepsilon}U_{x,y} = & \frac{[\mathfrak{L}(x+\varepsilon) - \mathfrak{L}(x+\varepsilon+1)] \cdot L(y+\varepsilon+1)}{q^{\varepsilon+1} \mathfrak{L}(x) \cdot L(y)} + \\ & + \frac{[\mathfrak{L}(x+\varepsilon) - \mathfrak{L}(x+\varepsilon+2)] \cdot L(y+\varepsilon+2)}{q^{\varepsilon+2} \mathfrak{L}(x) \cdot L(y)} + \\ & + \frac{[\mathfrak{L}(x+\varepsilon) - \mathfrak{L}(x+\varepsilon+3)] \cdot L(y+\varepsilon+3)}{q^{\varepsilon+3} \mathfrak{L}(x) \cdot L(y)} + \dots + \\ & + \frac{[\mathfrak{L}(x+\varepsilon) - \mathfrak{L}(x+\varepsilon+m)] \cdot L(y+\varepsilon+m)}{q^{\varepsilon+m} \mathfrak{L}(x) \cdot L(y)} + \dots \end{aligned}$$

Fügt man im Zähler dieses Ausdruckes wieder das Anfangsglied:

$$\frac{[\mathfrak{L}(x+\varepsilon) - \mathfrak{L}(x)] \cdot \mathfrak{L}(y+\varepsilon)}{q^\varepsilon} = 0$$

hinzu, so findet man nach bekannten Umformungen ohne besondere Schwierigkeit:

$${}^\varepsilon U_{x,y} = \frac{\mathfrak{L}(x+\varepsilon) \cdot D_{y+\varepsilon}}{\mathfrak{L}(x) \cdot D_y} \cdot R_{y+\varepsilon} - \frac{D_{x+\varepsilon} \cdot \mathfrak{L}(y+\varepsilon)}{D_x \cdot \mathfrak{L}(y)} \cdot R_{x+\varepsilon, y+\varepsilon}$$

oder auch, da:

$$\frac{\mathfrak{L}(x+\varepsilon) \cdot D_{y+\varepsilon}}{\mathfrak{L}(x) \cdot D_y} = \frac{D_{x+\varepsilon} \cdot \mathfrak{L}(y+\varepsilon)}{D_x \cdot \mathfrak{L}(y)}$$

ist, die Gleichung:

$${}^\varepsilon U_{x,y} = \frac{D_{x+\varepsilon} \cdot \mathfrak{L}(y+\varepsilon)}{D_x \cdot \mathfrak{L}(y)} \cdot [R_{y+\varepsilon} - R_{x+\varepsilon, y+\varepsilon}],$$

wobei $R_{y+\varepsilon}$ den gegenwärtigen Wert der jährlich anticipativen Leibrente: 1 für eine $(y+\varepsilon)$ -jährige Frau, $R_{x+\varepsilon, y+\varepsilon}$ den gegenwärtigen Wert der jährlich anticipativen Verbindungsrente: 1, zahlbar auf die Dauer des gleichzeitigen Lebens eines $(x+\varepsilon)$ -jährigen Mannes und einer $(y+\varepsilon)$ -jährigen Frau vorstellen.

Im Allgemeinen ist bezüglich der abgeleiteten Werte $U_{x,y}$ und ${}^\varepsilon U_{x,y}$ noch zu erwähnen, dass sich dieselben nicht ändern, wenn die jährlichen Witwenrenten: 1 in gleich hohen Raten halb-, vierteljährlich oder monatlich ausgezahlt werden sollen, denn, wie ersichtlich ist, würden sich unter solchen Voraussetzungen die diesbezüglich vorzunehmenden Correctionen der jährlich berechneten Leib-, respective Verbindungsrentenwerte gegenseitig aufheben.

Bedeutend complicirter gestalten sich die Ausdrücke für die gegenwärtigen Werte der Überlebensrenten, wenn nicht der constante Anspruch auf die jährliche Witwenrente: 1, sondern ein nach Jahren des gleichzeitigen Lebens zweier Ehegatten steigender Anspruch auf Witwenrente erworben werden soll. Wie bei den steigenden Ansprüchen auf Invaliditätsrente kann es sich auch hier nur um allgemeine Fälle handeln, aus welchen sich, sobald die gestellten Anforderungen bekannt sind, speciellere Fälle ableiten lassen.

Zunächst legen wir uns daher die Frage vor: „Wie groß ist für ein Ehepaar, von welchem der Mann x , die Frau y Jahre alt ist, der gegenwärtige Wert eines nach Jahren des gleichzeitigen Lebens:

$z=0, 1, 2, 3, \dots, m, \dots$ steigenden Anspruches auf Witwenrente vom jährlichen Ausmaße: γ_z , für welches die Relation besteht:

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots < \gamma_m < \dots \quad "$$

Wenn $\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)$ Ehepaare in die Versicherung eintreten, so kann man die Anzahl der im Laufe des ersten Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Witwen mit:

$$W(y+1) = [\mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(x+1)] \cdot L(y+1)$$

bezeichnen. Nach Ablauf eines Jahres leben aber nur noch $\mathfrak{L}(x+1) \cdot L(y+1)$ Ehepaare, folglich ist die Anzahl der im Laufe des zweiten Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Witwen durch:

$$W(y+2) = [\mathfrak{L}(x+1) - \mathfrak{L}(x+2)] \cdot L(y+2)$$

auszudrücken. Da endlich nach Verlauf von m Jahren allgemein noch: $\mathfrak{L}(x+m) \cdot L(y+m)$ Ehepaare sich am Leben befinden, so hat man für die Anzahl der im Laufe des $(m+1)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres entstandenen und das Jahr überlebenden Witwen die Gleichung:

$$W(y+m+1) = [\mathfrak{L}(x+m) - \mathfrak{L}(x+m+1)] \cdot L(y+m+1).$$

Wenn den Witwen $W(y+1)$ vom erreichten $(y+1)^{\text{ten}}$ Lebensjahre angefangen bis zum Tode je die jährliche Rente γ_0 , den Witwen $W(y+2)$ also vom $(y+2)^{\text{ten}}$ Lebensjahre bis zum Ableben je die jährliche Rente γ_1 , endlich jeder der Witwen $W(y+m+1)$ auf Lebensdauer die jährliche Rente γ_m zuerkannt wird, so sind die gegenwärtigen Werte dieser Rentenzahlungen, wenn $R_{y+1}, R_{y+2}, \dots, R_{y+m+1}, \dots$ die baaren Werte der jährlich anticipativen Leibrente: 1 für die beziehungsweise $(y+1), (y+2), \dots, (y+m+1), \dots$ -jährigen Frauen bedeuten,:

$$\gamma_0 \cdot \frac{W(y+1) \cdot R_{y+1}}{q}, \gamma_1 \cdot \frac{W(y+2) \cdot R_{y+2}}{q^2}, \dots, \gamma_m \cdot \frac{W(y+m+1) \cdot R_{y+m+1}}{q^{m+1}}, \dots,$$

und die Summe dieser Werte stellt den gegenwärtigen Gesamtwert aller genannten Rentenzahlungen vor. Hienach entfällt auf ein versichertes Ehepaar der Betrag:

$$V_{x,y} = \frac{\gamma_0 \cdot \frac{W(y+1) \cdot R_{y+1}}{q} + \gamma_1 \cdot \frac{W(y+2) \cdot R_{y+2}}{q^2} + \dots + \gamma_m \cdot \frac{W(y+m+1) \cdot R_{y+m+1}}{q^{m+1}} + \dots}{\mathfrak{L}(x) \cdot L(y)}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner dieses Bruches durch q^y und führt die discountirten Zahlen von $W(y+1)$, $W(y+2)$, ... $W(y+m+1)$, ... ein, bezeichnet also folgendermaßen:

$$\frac{W(y+1)}{q^{y+1}} = D_{y+1}^W, \frac{W(y+2)}{q^{y+2}} = D_{y+2}^W, \dots \frac{W(y+m+1)}{q^{y+m+1}} = D_{y+m+1}^W, \dots,$$

so erhält man:

$$V_{x,y} = \frac{\gamma_0 \cdot D_{y+1}^W \cdot R_{y+1} + \gamma_1 \cdot D_{y+2}^W \cdot R_{y+2} + \dots + \gamma_m \cdot D_{y+m+1}^W \cdot R_{y+m+1} + \dots}{\mathcal{L}(x) \cdot D_y},$$

und nach dieser Formel kann man für ein Ehepaar, von welchem der Mann x , die Frau y Jahre alt ist, den gegenwärtigen Wert (einmalige Prämie) eines nach gleichzeitig durchlebten Versicherungsjahren: $z=0, 1, 2, 3, \dots m, \dots$ steigenden Anspruches auf eine der mit γ_z bezeichneten Witwenrenten berechnen.

Soll für ein Ehepaar, von welchem der Mann x Jahre alt und activ, die Frau y Jahre alt ist, der gegenwärtige Wert (einmalige Prämie) $V_{x,y}^a$ eines nach gleichzeitig durchlebten Activitätsjahren des Mannes: $\zeta=0, 1, 2, \dots m, \dots$ steigenden Anspruches auf Witwenrente vom jährlichen Ausmaße: $\psi_0 < \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < \dots$ bestimmt werden, so muss außer der Absterbeordnung der Frauen auch diejenige der Activen und diejenige der Invaliden, weiters neben der Invaliditätstafel (Tafel der Activen) und der Tafel der im Laufe des Jahres entstandenen und das Jahr überlebenden Invaliden auch diejenige der im Laufe des Jahres überhaupt entstandenen Invaliden bekannt sein.

Wir verstehen unter: $A(x)$, $A(x+1)$, $A(x+2)$, ... $A(x+m)$, ... wieder die Zahlen der Activen für die aufeinander folgenden Alter und unter: $L(y)$, $L(y+1)$, $L(y+2)$, ... $L(y+m)$, ... die lebenden Frauen aus der sie betreffenden Absterbeordnung. Gelangen $A(x) \cdot L(y)$ Ehepaare, von welchen die Männer x Jahre alt und activ, die Frauen y Jahre alt sind, zur obenbezeichneten Versicherung, so beachte man, dass die $A(x)$ x -jährigen Activen zweierlei Einflüssen unterworfen sind: Dem Sterben und dem Invalidewerden, d. h. zur Abwicklung der bezeichneten Versicherung steigender Ansprüche auf Witwenrente kommen für die aufeinanderfolgenden Versicherungsjahre nicht allein die im Laufe eines Versicherungsjahres entstandenen und das Jahr überlebenden Witwen, sondern auch diejenigen Ehepaare in Betracht, deren Männer im Laufe eines Jahres invalide werden, und mit ihren Frauen das Jahr überleben. Zum Unterschiede von den Zahlen der „Männer überhaupt“: $\mathcal{L}(x)$, $\mathcal{L}(x+1)$, $\mathcal{L}(x+2)$, ... $\mathcal{L}(x+m)$, ... und von den Zahlen der Lebenden in der Absterbeordnung der Invaliden: $\mathcal{L}'(x)$, $\mathcal{L}'(x+1)$, $\mathcal{L}'(x+2)$, ... $\mathcal{L}'(x+m)$,

... drücken wir durch die Buchstabenzeichen: $\mathfrak{L}^a(x)$, $\mathfrak{L}^a(x+1)$, $\mathfrak{L}^a(x+2)$,
 $\dots \mathfrak{L}^a(x+m)$, ... die Zahlen der Lebenden in der Absterbeordnung der
 Activen aus und bezeichnen ferner zur Unterscheidung von den Zahlen der
 im Laufe des Jahres hervorgegangenen und das Jahr überlebenden
 Invaliden: $J(x+1)$, $J(x+2)$, $J(x+3)$, ... $J(x+m+1)$, ... für die bezüg-
 lichen Alter der Activen der Reihe nach mit: $x \cdot i_{x+1}$, $x+1 \cdot i_{x+2}$, $x+2 \cdot i_{x+3}$,
 $\dots x+m \cdot i_{x+m+1}$, ... die im Laufe eines Jahres überhaupt entstandenen
 Invaliden. Um die im Laufe eines Jahres entstandenen und das Jahr über-
 lebenden Witwen zu berechnen, hat man zunächst die im Laufe des
 ersten Versicherungsjahres gestorbenen Activen: ${}_x T_{x+1}^a$ zu bestimmen.
 Man bedenke hiebei, dass von $A(x)$ Activen im Laufe dieses Jahres $x \cdot i_{x+1}$
 invalide werden und durchschnittlich noch ein halbes Jahr activ waren.

Sonach sind die zu berechnenden Todten offenbar aus: $\left(A(x) - \frac{x \cdot i_{x+1}}{2}\right)$
 Activen hervorgegangen, und es besteht die Relation:

$${}_x T_{x+1}^a = \left(A(x) - \frac{x \cdot i_{x+1}}{2}\right) \frac{\mathfrak{L}^a(x) - \mathfrak{L}^a(x+1)}{\mathfrak{L}^a(x)}.$$

Allgemein ergibt sich für die im Laufe des $(m+1)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres
 gestorbenen Activen:

$${}_{x+m} T_{x+m+1}^a = \left(A(x+m) - \frac{x+m \cdot i_{x+m+1}}{2}\right) \frac{\mathfrak{L}^a(x+m) - \mathfrak{L}^a(x+m+1)}{\mathfrak{L}^a(x+m)}.$$

Weiters sind die Todten zu berechnen, welche aus den im Laufe des ersten
 Versicherungsjahres entstandenen Invaliden hervorgehen. Hiezu hat
 man die Differenz:

$${}_x T_{x+1}^i = x \cdot i_{x+1} - J(x+1)$$

zu bilden. Für die im Laufe des $(m+1)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres entstandenen
 Invaliden bestimmen sich die Todten dieses Jahres in gleicher Weise, und
 man hat die Beziehung:

$${}_{x+m} T_{x+m+1}^i = x+m \cdot i_{x+m+1} - J(x+m+1).$$

Hienach kann man also die im Laufe des ersten Versicherungsjahres aus
 $A(x) \cdot L(y)$ Ehepaare hervorgegangenen Witwen, welche zu Anfang des
 zweiten Versicherungsjahres noch leben, durch:

$$W^a(y+1) = [{}_x T_{x+1}^a + {}_x T_{x+1}^i] \cdot L(y+1),$$

die Witwen, welche aus $A(x+1) \cdot L(y+1)$ Ehepaaren im Laufe des zweiten Versicherungsjahres entstanden sind und das Jahr überleben, durch:

$$W^a(y+2) = [{}_{x+1}T_{x+2}^a + {}_{x+1}T_{x+2}^i] \cdot L(y+2)$$

und diejenigen Witwen, welche aus $A(x+m) \cdot L(y+m)$ Ehepaaren im Laufe des $(m+1)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres hervorgingen und das Jahr überleben, durch:

$$W^a(y+m+1) = [{}_{x+m}T_{x+m+1}^a + {}_{x+m}T_{x+m+1}^i] \cdot L(y+m+1)$$

darstellen.

Die Anzahl der aus $A(x) \cdot L(y)$ hervorgegangenen Ehepaare, welche das erste Versicherungsjahr überleben, und deren Männer invalide wurden, ergibt sich mit:

$$J(x+1) \cdot L(y+1),$$

die Anzahl der aus $A(x+1) \cdot L(y+1)$ Ehepaaren entstandenen, welche das zweite Versicherungsjahr überleben, und von denen die Männer invalide wurden, mit:

$$J(x+2) \cdot L(y+2),$$

endlich die Anzahl der aus $A(x+m) \cdot L(y+m)$ Ehepaaren im Laufe des $(m+1)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres entstandenen und das Jahr überlebenden Ehepaare, deren Männer invalid sind, mit:

$$J(x+m+1) \cdot L(y+m+1).$$

Während den Witwen $W^a(y+1)$, da für sie die anrechenbare Aktivitätszeit des verstorbenen Mannes $\xi=0$ ist, nach dem Witwenpensions- (Provisions-) Normale der Bezug der jährlich anticipativen Leibrente ψ_0 , den Witwen $W^a(y+2)$, welchen ein volles Aktivitätsjahr des Mannes in Anrechnung kommt, der Bezug der jährlich anticipativen Leibrente ψ_1 , den Witwen $W^a(y+m+1)$ mit m anrechenbaren Aktivitätsjahren des Mannes der Bezug der jährlich anticipativen Leibrente ψ_m zusteht, haben sich die Ehepaare $J(x+1) \cdot L(y+1)$ den Anspruch auf die jährliche Witwenrente ψ_0 , die Ehepaare $J(x+2) \cdot L(y+2)$ den Anspruch auf die jährliche Witwenrente ψ_1 , und die Ehepaare $J(x+m+1) \cdot L(y+m+1)$ den Anspruch auf die jährliche Witwenrente ψ_m erworben. Wenn demnach die jährlich-anticipativen Leibrentenwerte von 1 für die in Betracht kommenden Alter: $y+1, y+2, \dots, y+m+1, \dots$ der Witwen, d. h. die Werte: $R_{y+1}, R_{y+2}, \dots, R_{y+m+1}, \dots$ und die auf Grund der Absterbeordnung der Invaliden berechneten gegenwärtigen Werte des Anspruches auf die

Witwenrente von jährlich 1 für alle in Betracht kommenden Alters-combinationen der betreffenden Ehepaare, nämlich die Werte: $U_{x+1, y+1}^i$, $U_{x+2, y+2}^i, \dots, U_{x+m+1, y+m+1}^i, \dots$ bekannt sind, so ergibt sich für $V_{x, y}^a$ nach bekannten Grundsätzen die folgende Formel:

$$V_{x, y}^a = \frac{\psi_0 \cdot \frac{W^a(y+1) \cdot R_{y+1} + J(x+1) \cdot L(y+1) \cdot U_{x+1, y+1}^i}{q} + \psi_1 \cdot \frac{W^a(y+2) \cdot R_{y+2} + J(x+2) \cdot L(y+2) \cdot U_{x+2, y+2}^i + \dots}{q^2} + \dots + \psi_m \cdot \frac{W^a(y+m+1) \cdot R_{y+m+1} + J(x+m+1) \cdot L(y+m+1) \cdot U_{x+m+1, y+m+1}^i + \dots}{q^m}}{A(x) \cdot L(y)},$$

worin allgemein:

$$U_{x+m+1, y+m+1}^i = R_{y+m+1} - R_{x+m+1, y+m+1}^i,$$

und:

$$R_{x+m+1, y+m+1}^i = \frac{\sum (D_{x+m+1}^i \cdot L(y+m+1))}{D_{x+m+1}^i \cdot L(y+m+1)},$$

und in dieser Formel:

$$D_{x+m+1}^i = \frac{\mathfrak{L}^i(x+m+1)}{q^{x+m+1}}$$

ist.

Die für $V_{x, y}^a$ erhaltene Gleichung kann einfacher geschrieben werden, wenn man Zähler und Nenner durch q^y dividirt und dann neben den discountirten Zahlen der lebenden Frauen auch die discountirten Werte von $W^a(y+1)$, $W^a(y+2)$, \dots , $W^a(y+m+1)$, \dots in die Rechnung einführt, also:

$$\frac{W^a(y+1)}{q^{y+1}} = D_{y+1}^{W^a}, \frac{W^a(y+2)}{q^{y+2}} = D_{y+2}^{W^a}, \dots, \frac{W^a(y+m+1)}{q^{y+m+1}} = D_{y+m+1}^{W^a}, \dots$$

setzt. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$V_{x, y}^a = \frac{\psi_0 \cdot [D_{y+1}^{W^a} \cdot R_{y+1} + J(x+1) \cdot D_{y+1} \cdot U_{x+1, y+1}^i] + \psi_1 \cdot [D_{y+2}^{W^a} \cdot R_{y+2} + J(x+2) \cdot D_{y+2} \cdot U_{x+2, y+2}^i] + \dots + \psi_m \cdot [D_{y+m+1}^{W^a} \cdot R_{y+m+1} + J(x+m+1) \cdot D_{y+m+1} \cdot U_{x+m+1, y+m+1}^i] + \dots}{A(x) \cdot D_y},$$

und man nennt $V_{x,y}^a$ auch die einmalige Prämie eines x -jährigen Activen und seiner y -jährigen Frau behufs Erwerbung eines nach gleichzeitig durchlebten Activitätsjahren: $\zeta = 0, 1, 2, \dots m, \dots$ des Mannes steigenden Anspruches auf Witwenrente vom jährlichen Ausmaße:

$$\psi_0 < \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < \dots$$

Ist die Witwenpensions-, Provisionsscala: $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_m, \dots$ von der Invalidenpensions-, Provisionsscala: $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m, \dots$, abhängig und gilt die allgemeine Bestimmung, dass die Witwenrente einer Ehefrau einen Bruchtheil, z. B. immer die Hälfte der zustehenden oder bereits zuerkannten Invaliditätsrente des Mannes betragen soll, so heißt dies, es kommen ebensoviele verschiedene Witwenpensionsscalas zur Anwendung als Invalidenpensionsausmaße bestehen. Denn, findet die Versicherung der Frau (Verheirathung des Mannes) zu Beginn oder noch im Laufe des 1^{ten} Activitätsjahres statt, so ist:

$$\psi_0 = \frac{\lambda_0}{2}, \psi_1 = \frac{\lambda_1}{2}, \psi_2 = \frac{\lambda_2}{2}, \dots,$$

findet dieselbe zu Beginn oder noch im Laufe des 2^{ten} Activitätsjahres statt, so ist:

$$\psi_0 = \frac{\lambda_1}{2}, \psi_1 = \frac{\lambda_2}{2}, \psi_2 = \frac{\lambda_3}{2}, \dots,$$

findet sie zu Beginn oder noch im Laufe des 3^{ten} Activitätsjahres statt, so ist:

$$\psi_0 = \frac{\lambda_2}{2}, \psi_1 = \frac{\lambda_3}{2}, \psi_2 = \frac{\lambda_4}{2}, \dots,$$

u. s. f.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass in den Gleichungen $V_{x,y}$ und $V_{x,y}^a$ ε Glieder des Zählers ausfallen, sobald ε Carenzjahre vorausgesetzt werden.

III. Terminliche Prämien

für Witwen-Renten (Pensionen, Provisionen).

In den meisten Fällen geschieht die Deckung der Werte: $U_{x,y}$, $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ und $V_{x,y}^a$ nicht auf Grund einer einmaligen Leistung, sondern durch jährliche, halbjährliche, vierteljährliche oder monatliche Prämienzahlung. Diese terminliche Prämienzahlung erfolgt dann entweder während der ganzen Dauer oder nur auf eine beschränkte Zeit des gleichzeitigen Lebens zweier Ehegatten oder endlich nur solange, als sich der Mann noch im Zustande der Activität befindet oder eine gewisse Anzahl Activitätsjahre nicht überschritten hat, und die Frau am Leben bleibt.

Bezeichnet man mit $u_{x,y}$ ganz allgemein den gegenwärtigen Wert (einmalige Prämie) eines constanten oder steigenden Anspruches auf Witwenrente von beliebigem Jahresausmaß und mit $u_{x,y}$ die zu suchende anticipative Jahresprämie, zahlbar auf die ganze Dauer des gleichzeitigen Lebens eines x -jährigen Mannes und einer y -jährigen Frau, so ist $u_{x,y}$ als eine jährlich anticipative Verbindungsrente zu betrachten, deren gegenwärtiger Wert durch:

$$u_{x,y} \cdot R_{x,y}$$

ausgedrückt werden kann, worin $R_{x,y}$ den baaren Werth der jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1 vorstellt. Da die jährliche Prämienzahlung im Betrage von $u_{x,y}$ der einmaligen Prämie $u_{x,y}$ Genüge leisten soll, so besteht die Relation:

$$u_{x,y} \cdot R_{x,y} = u_{x,y}$$

woraus sich die Unbekannte:

$$u_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{R_{x,y}}$$

finden lässt.

Hat die jährlich-anticipative Prämienzahlung nicht die ganze Dauer, sondern im Maximum m Jahre des gleichzeitigen Lebens der Ehegatten hindurch, sonach höchstens m Mal zu erfolgen, wenn innerhalb der gedachten Zeit die Auflösung des Ehepaares nicht stattfindet, so hat man im Zähler des auf der rechten Seite der identischen Gleichung:

$$u_{x,y} \cdot R_{x,y} = u_{x,y} \cdot \frac{D_x L(y) + D_{x+1} L(y+1) + \dots + D_{x+m-1} L(y+m-1) + D_{x+m} L(y+m) + \dots}{D_x \cdot L(y)}$$

stehenden Bruches nur die ersten m Glieder in Rechnung zu ziehen. Da nach früheren Entwicklungen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} & \frac{D_x \cdot L(y) + D_{x+1} \cdot L(y+1) + \dots + D_{x+m-1} \cdot L(y+m-1)}{D_x \cdot L(y)} = \\ & = \frac{\Sigma [D_x \cdot L(y)] - \Sigma [D_{x+m} \cdot L(y+m)]}{D_x \cdot L(y)} \\ & = R_{x,y} - \frac{D_{x+m} \cdot L(y+m)}{D_x \cdot L(y)} R_{x+m, y+m} \end{aligned}$$

so gelangt man, wenn die nach dem m^{ten} Jahre des gleichzeitigen Lebens beider Ehegatten aufhörende, anticipative Jahresprämie durch ${}^m u_{x,y}$ ausgedrückt wird, zu der Formel:

$${}^m u_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{R_{x,y} - \frac{D_{x+m} \cdot L(y+m)}{D_x \cdot L(y)} R_{x+m, y+m}},$$

worin $R_{x,y}$ die frühere Bedeutung hat, und $R_{x+m, y+m}$ den baaren Wert einer jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1 eines um m Jahre älteren Ehepaares, D_x und D_{x+m} die discountirten Zahlen der lebenden „Männer überhaupt“ vom Alter x resp. $x+m$, $L(y)$ und $L(y+m)$ die Zahlen der lebenden Frauen vom Alter y resp. $y+m$ vorstellen.

Findet die jährliche Prämienzahlung, durch welche der Anspruch auf eine constante oder steigende Witwenrente erworben werden soll, nicht während der ganzen Dauer des gleichzeitigen Lebens eines Ehepaares, sondern nur die Activität des Mannes hindurch, und solange die Frau lebt, statt, so bezeichne man die bezüglichliche anticipative Jahresprämie eines beim Eintritt in die Versicherung x resp. y -jährigen Ehepaares mit $u_{x,y}^a$ und verstehe unter $R_{x,y}^a$ den gegenwärtigen Wert einer jährlich-anticipativen Verbindungsrente: 1, welche mit Auflösung des Ehepaares überhaupt, im Ubrigen aber aufhört, sobald die Invalidität des Mannes eingetreten ist. Man gelangt dann zu der Beziehung:

$$u_{x,y}^a = \frac{u_{x,y}}{R_{x,y}^a},$$

worin $u_{x,y}$ den gegenwärtigen Wert des Anspruches auf eine beliebige Witwenpension für ein Ehepaar bedeutet, bei welchem der Mann x Jahre, die Frau y Jahre alt ist.

Für ein Ehepaar, von welchem der Mann 25, die Frau 20 Jahre alt ist, berechnet man nun bekanntlich den baaren Wert des Anspruches auf die constante Witwenrente von jährlich 1 fl. gemäss Formel:

$$U_{25,20} = R_{20} - R_{25,20}.$$

Nach Taf. III und VI(a) des Anhanges ist dann:

$$U_{25,20} = 18.5436 - 15.6485 = 2.8951 \text{ fl.},$$

welcher Wert sich auch in Taf. VII vorfindet, und nach Taf. VI(b) hat man für:

$$R_{25,20}^a = 14.7358$$

zu setzen. Beispielsweise beträgt also für das beim Eintritt in die Versicherung 25- resp. 20-jährige Ehepaar die anticipative, auf die ganze Dauer der Activität des Mannes und solange die Frau lebt, zahlbare Jahresprämie zur Erwerbung des Anspruches auf die jährliche Witwenrente von 100 fl.:

$$u_{25,20}^a = \frac{289 \cdot 51}{14 \cdot 736} = 19 \text{ fl. } 65 \text{ kr.}$$

Soll die jährlich anticipative Prämienzahlung höchstens m Activitätsjahre des Mannes, und solange die Frau lebt, andauern, hört also die Leistung der anticipativen Jahresprämien mit dem m^{ten} Jahre, welches der Mann in Activität und zugleich mit seiner Frau erlebt, unbedingt, früher nur dann auf, wenn etwa während dieser Zeit die Auflösung des Ehepaares oder die Invalidität des Mannes erfolgt, so hat man im Zähler des auf der rechten Seite der identischen Gleichung:

$$u_{x,y}^a \cdot R_{x,y}^a = u_{x,y}^a \cdot \frac{D_x^a \cdot L(y) + D_{x+1}^a \cdot L(y+1) + \dots + D_{x+m-1}^a \cdot L(y+m-1) + D_{x+m}^a \cdot L(y+m) + \dots}{D_x^a \cdot L(y)}$$

befindlichen Bruches wieder nur die m ersten Glieder zu berücksichtigen, wodurch sich ähnlich wie oben als anticipative Jahresprämie ${}^m u_{x,y}^a$, welche nach dem m^{ten} gleichzeitig durchlebten Activitätsjahre des Mannes für ein x -, beziehungsweise y -jähriges Ehepaar aufhört, ergibt:

$${}^m u_{x,y}^a = \frac{u_{x,y}}{R_{x,y}^a - \frac{D_{x+m}^a \cdot L(y+m)}{D_x^a \cdot L(y)} R_{x+m,y+m}^a}$$

In dieser Gleichung ist $u_{x,y}$ wieder der baare Wert des Anspruches auf irgend eine Witwenrente, $R_{x,y}^a$ und $R_{x+m,y+m}^a$ die gegenwärtigen Werte der jährlich anticipativen Verbindungsrenten von 1, zahlbar auf die Dauer der Activität eines x -, respective $(x+m)$ -jährigen Mannes, und wenn seine y -, respective $(y+m)$ -jährige Frau solange lebt. Endlich bedeuten D_x^a und D_{x+m}^a die discountirten Zahlen der Activen vom Alter x , respective $x+m$ Jahren, und $L(y)$ und $L(y+m)$ die Anzahl der lebenden Frauen im Alter von y , respective $y+m$ Jahren.

Will man den Anspruch auf eine Witwenrente durch Zahlung anticipativer Monatsprämien erwerben, so muss man die für Jahresprämien angegebenen Formeln entsprechend umgestalten.

Angenommen, es wäre $\frac{1}{12}u_{x,y}$ die anticipative Monatsprämie, zahlbar auf die ganze Dauer des gleichzeitigen Lebens zweier Ehegatten, und $u_{x,y}$ die einmalige Prämie zur Erwerbung irgend eines Anspruches auf Witwenrente für dasselbe Ehepaar, so ist die jährliche Summe der untereinander gleichen und anticipativen Monatsprämien:

$$12 \cdot \frac{1}{12} u_{x,y}$$

und der gegenwärtige Wert aller überhaupt zahlbaren Monatsprämien:

$$12 \cdot \frac{1}{12} u_{x,y} \cdot \frac{12}{12} R_{x,y},$$

wenn $\frac{12}{12} R_{x,y}$ den baaren Wert einer in gleichen monatlichen Pränumerandoraten zahlbaren Verbindungsrente von jährlich 1 bedeutet. Nun ist, wie bekannt,

$$\frac{12}{12} R_{x,y} = R_{x,y} - \delta,$$

man erhält also, da der einmaligen Prämie Gentige zu leisten ist,

$$\frac{1}{12} u_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{12 (R_{x,y} - \delta)}.$$

Bezeichnet man weiters mit $\frac{m}{12} u_{x,y}$ die mit dem m^{ten} Jahre des gleichzeitigen Lebens zweier Ehegatten aufhörende anticipative Monatsprämie zur Erwerbung des wie oben beliebigen Anspruches auf Witwenrente, so ergibt sich nach bekannten Grundsätzen:

$$\frac{m}{12} u_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{12 \left(\frac{12}{12} R_{x,y} - \frac{D_{x+m} \cdot L(y+m)}{D_x \cdot L(y)} \cdot \frac{12}{12} R_{x+m,y+m} \right)}$$

oder anstatt $\frac{12}{12} R_{x,y}$ und $\frac{12}{12} R_{x+m,y+m}$ die corrigirten Werte von $R_{x,y}$ und $R_{x+m,y+m}$ eingeführt:

$$\frac{m}{12} u_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{12 \left((R_{x,y} - \delta) - \frac{D_{x+m} \cdot L(y+m)}{D_x \cdot L(y)} \cdot (R_{x+m,y+m} - \delta) \right)}.$$

Ganz ähnliche Ausdrücke wie für $\frac{1}{12}u_{x,y}$ und $\frac{m}{12}u_{x,y}$ bestehen für die anticipativen Monatsprämien $\frac{1}{12}u_{x,y}^a$ und $\frac{m}{12}u_{x,y}^a$ eines x -jährigen Activen und seiner y -jährigen Frau, u. zw. ist:

$$\frac{1}{12}u_{x,y}^a = \frac{u_{x,y}}{12 \cdot (R_{x,y}^a - \delta)},$$

zahlbar auf die ganze Dauer der Activität des Mannes, und wenn die Frau solange lebt, ferner:

$$\frac{m}{12}u_{x,y}^a = \frac{u_{x,y}}{12 \left((R_{x,y}^a - \delta) - \frac{D_{x+m}^a \cdot L(y+m)}{D_x^a \cdot L(y)} \cdot (R_{x+m,y+m}^a - \delta) \right)},$$

zahlbar maximal durch m Activitätsjahre des Mannes, und wenn die Frau solange lebt.

Aus den Formeln für die anticipativen Prämien lassen sich schließlich diejenigen für die postnumerando zahlbaren Prämien ableiten.

Bezeichnet man mit $u'_{x,y}$ die jährlich postnumerando, mit $\frac{1}{12}u'_{x,y}$ die monatlich postnumerando und auf die ganze Dauer des gleichzeitigen Lebens eines Ehepaares zahlbare Prämie, so ergibt sich, da in beiden Fällen die erste Prämienzahlung nicht in Betracht kommt, allgemein:

$$u'_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{R_{x,y} - 1},$$

und bei 4⁰/₁₀iger Verzinsung:

$$\frac{1}{12}u'_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{12 \cdot \left(R_{x,y} - \delta - \frac{1}{12} \right)} = \frac{u_{x,y}}{12 \cdot (R_{x,y} - 0.548)},$$

worin $u_{x,y}$ für ein x -, beziehungsweise y -jähriges Ehepaar, wie oben die einmalige Prämie zur Erwerbung irgend eines Anspruches auf Witwenrente bedeutet.

Analog hat man vorzugehen, wenn es sich um aufhörende, nachhinein zahlbare Prämien und speciell um solche handelt, welche, wenn die Ehefrau solange lebt, mit dem Eintritt der Invalidität oder schon nach Ablauf von m Activitätsjahren des Mannes aufhören. Man braucht immer nur die in den oben erhaltenen Formeln verwendeten anticipativen Rentenwerte entsprechend zu corrigiren.

Abgesehen von einem einzigen Beispiele wurde bisher unter $u_{x,y}$ die einmalige Prämie zur Erwerbung eines beliebigen Anspruches auf

Witwenrente verstanden. In dem speciellen Falle als man:

$$u_{x,y} = U_{x,y} = R_y - R_{x,y}$$

zu setzen hat, berechnet sich für ein Ehepaar, von welchem der Mann x , die Frau y Jahre alt ist, die zur Erwerbung des Anspruches auf die Witwenrente von jährlich 1 und während der ganzen Dauer des gleichzeitigen Lebens der beiden Ehegatten zahlbare anticipative Jahresprämie nach der Formel:

$$u_{x,y} = u_{x,y} = \frac{R_y - R_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{R_y}{R_{x,y}} - 1.$$

Für die postnumerando zahlbare Jahresprämie besteht dann die Relation:

$$u'_{x,y} = \frac{R_y - R_{x,y}}{R_{x,y} - 1},$$

für die anticipative Monatsprämie diejenige:

$$\frac{1}{12} u_{x,y} = \frac{R_y - R_{x,y}}{12(R_{x,y} - \delta)}$$

und endlich für die postnumerando zahlbare Monatsprämie die Gleichung:

$$\frac{1}{12} u'_{x,y} = \frac{R_y - R_{x,y}}{12 \left(R_{x,y} - \delta - \frac{1}{12} \right)}$$

Auf Grund der letzten Formel und eines 4⁰/₁₀igen Zinsfußes wurden nun für alle Alterscombinationen der Ehepaare, welche zwischen $\begin{cases} x = 25 \\ y = 18 \end{cases}$ und $x = y = 60$ Jahre liegen, die postnumerando und auf die Dauer des gleichzeitigen Lebens der Ehegatten zahlbaren Monatsprämien zur Erwerbung des Anspruches auf die Witwenrente (Pension, Provision) von 100 bestimmt und in Tafel VIII des Anhanges verzeichnet. Da nach Tafel VII aber die gegenwärtigen Werte: $U_{x,y} = R_y - R_{x,y}$ des Anspruches auf die jährliche Witwenrente: 1 und nach Tafel VI(a), die gegenwärtigen Werte $R_{x,y}$ der jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1 berechnet vorliegen, wurde die bezeichnete Formel in der Gestalt:

$$\frac{1}{12} u'_{x,y} = \frac{100 \cdot U_{x,y}}{12(R_{x,y} - 0.548)}$$

verwendet.

Hienach ergibt sich beispielsweise für ein Ehepaar, von welchem der Mann $x = 30$, die Frau $y = 25$ Jahre alt ist:

$$\frac{1}{12} u'_{30,25} = \frac{100 \times 3.192}{12 \times (15.035 - 0.548)} = \frac{319.2}{12 \times 14.487} = 1.836,$$

d. h.: Zur Erwerbung des Anspruches auf die jährliche Witwenrente von 100 fl. ist von einem Ehepaare, bei welchem der Mann 30, die Frau 25 Jahre alt ist, auf die ganze Dauer des gleichzeitigen Lebens Beider monatlich nachhinein der Betrag von 1 fl. 84 kr. zu zahlen.

III. Capitel.

Die Reserven und deren Berechnung.

§. 7.

Reserve der Versicherungs-Vereine.

I. Allgemeine Bemerkungen.

Überblickt man noch einmal kurz die in den vorstehenden Paragraphen dargelegten versicherungstechnischen Rechnungsoperationen, so kann man sagen, dass denselben eigentlich eine einzige Methode zu Grunde liegt, und zwar die: Für eine große Zahl Personen desselben Alters, welche unter gleichen Bedingungen versichert sind, sämtliche erwartungsmäßige Ausgaben und, da es sich immer um verzinssliche Capitalien handelt, deren gegenwärtige Werte festzustellen, um auf Grund des solcherweise in einem Capitalsbetrage ermittelten Erfordernisses die zur Deckung desselben nöthige Einzahlung der Versicherten zu bestimmen. Versicherungsvereine, welche nach dem angedeuteten Grundsatz vorgehen, entsprechen demnach dem gerechten Streben, weder mehr zu fordern noch mehr zu geben, als sich rechnungsgemäß als richtig darstellt.

Aus den vorhergehenden Erörterungen ist weiters ersichtlich, welche engen Beziehungen zwischen den Einzahlungen (Prämien) und den diesbezüglichen Ansprüchen stattfinden. Es muss hienach einleuchten, wie ungerecht der Vorgang bei vielen humanitären Instituten, welche Invaliden-, Witwen- und Waisenversorgung bezwecken, ist, wenn bei denselben ein solches Gleichgewicht zwischen den Einzahlungen der Mitglieder und den Leistungen des Institutes nicht besteht, wenn ganze Classen von Betheiligten, früher oder später eingetretene Mitglieder durch irrthümliche, arbiträre Statuten Bestimmungen verkürzt, andere unter gleichen Verhältnissen stehende Personen günstiger behandelt werden. Die von den Verwaltungen solcher humanitärer Institute nicht selten ausgesprochene Meinung, dass,

im Falle sie gleicherweise wie Versicherungsvereine rechnen, d. h. Leistung und Gegenleistung abwägen sollten, ihr Institut den Charakter einer gemeinnützigen oder wohlthätigen Anstalt verlieren würde, ist sicher nicht stichhältig. Auch bei den genannten Instituten müssen die Einzahlungen versicherungstechnisch den statutenmäßigen Ansprüchen entsprechen, soll anders die dauernde Bestandfähigkeit des Institutes, die jederzeitige Erfüllung der eingegangenen Verpflichtungen gesichert, und eine durch Insolvenz hervorgegangene Katastrophe verhütet werden, welche eintritt, wenn in späterer Zeit die Verpflichtungen des Institutes entweder gar nicht oder nur ganz ungenügend erfüllt werden.

Wie aus der Natur der Sache hervorgeht, kann mit Bestimmtheit und trotz aller technischen Hilfsmittel auch ein Versicherungsverein nicht voraussagen, welche Einzahlungen bei Abschluss einer einzigen Versicherung zur Erwerbung bestimmter Ansprüche dem wirklichen Bedürfnisse entsprechen dürften, da dem Vereine weder die Zeit der eintretenden Invalidität, noch die Todesstunde des Versicherten bekannt ist. Die versicherungsmäßig zu leistenden Einzahlungen und die daraus erwachsenden Ansprüche eines Mitgliedes sind durchschnittliche, rechnungsmäßige Folgerungen, welche sich auf eine grosse Anzahl Beobachtungen über das Sterben oder Invalidwerden von Personen gleicher Art, desselben Alters und derselben Versicherungssumme gründen.

In diesem Sinne spricht man bei Versicherungsvereinen von einer gleichmäßigen Vertheilung des Risico und hat in der genannten Art und Weise der Rechnung ein Mittel richtiger Gebarung, ein Mittel ferner, jedem einzelnen Vereinsmitgliede Gerechtigkeit widerfahren zu lassen. Mit anderen Worten: Durch Anwendung der in den früheren Paragraphen angedeuteten Rechnungsoperationen ist die Möglichkeit vorhanden, Mitgliedern eines Versicherungsvereines zu allen Zeiten die nämlichen Vortheile zu bieten, weder die nachkommenden noch die früher eingetretenen Mitglieder zu bevorzugen, und was die Gesamtheit der Mitglieder, den Verein anbelangt, so werden die nach den bezüglichen mathematischen Entwicklungen berechneten Werte oder Prämien die zu erwerbenden oder bereits erworbenen Ansprüche der Mitglieder decken, wenn nur die Anzahl der Versicherten genügend groß ist, und die auf verlässlicher Beobachtung beruhenden Rechnungsgrundlagen den Vereinsverhältnissen entsprechen. Ob und in welchem Falle diese beiden Bedingungen zutreffen, ist allerdings nicht sofort zu beurtheilen, es soll aber im Folgenden gezeigt werden, auf welche Weise ein solches Urtheil gewonnen wird.

Angenommen die genannten beiden Bedingungen träfen wirklich zu, so müsste das factische Ergebnis der Sterblichkeit, der Invalidität

und der Verzinsung der eingelaufenen Gelder mit der Annahme, d. h. nicht allein rücksichtlich der zu Grunde gelegten Mortalitätstafeln und der bezüglichen Invaliditätstafel, sondern auch hinsichtlich des in Rechnung gebrachten Zinsfußes, also mit der Erwartung im Einklange stehen.

Bei jedem größeren Versicherungsverein, dessen Rechnungsgrundlagen auf eigener Beobachtung beruhen, könnte man, gestützt auf die erwähnten exacten Wertberechnungen, meinen, dass den Dingen freier Lauf zu lassen ist, sobald die Versicherungen abgeschlossen sind, für den Fortbetrieb und für eine gute Verwaltung gesorgt wurde. Dieses Vorgehen muss jedoch überhaupt und besonders dann als gewagt bezeichnet werden, wenn nicht absolut verlässliche Erfahrungen betreffs Mortalität und Invalidität vorliegen, wenn die Anzahl der Versicherten wohl genügend groß ist, aber zu besorgen ist, dass die angenommenen Rechnungsgrundlagen mit der Wirklichkeit nicht völlig übereinstimmen.

Gewöhnlich sind derart genaue und auf alle Verhältnisse passende statistische Daten nicht vorhanden und ergeben sich anderweitige Abweichungen vom zu erwartenden Ergebnis. Ein Versicherungsverein wird daher nicht nur ein rechnungsmäßig richtiges und gerechtes Vorgehen, sondern der Sicherheit halber auch die Prüfung der angewandten Fundamentalzahlen und sonstigen Annahmen anstreben.

Zu diesem Ende wäre also nach bestimmten Terminen einfach das factische dem erwartungsmäßigen Ergebnis gegenüberzustellen, d. h. die Bilanz zu ziehen und zu untersuchen, in welchem Verhältnisse der Erfolg die Erwartung deckt. Am zuverlässigsten könnte dieses Urtheil durch das Ergebnis der bereits abgewickelten Versicherungen gewonnen werden. Bedenkt man aber, dass die abgewickelten Versicherungen, weil Lebens-, respective Invalidenversicherungen im Allgemeinen immer eine lange Reihe von Jahren in Anspruch nehmen, zumeist einen nur geringen Procentsatz der überhaupt abgeschlossenen Versicherungen ausmachen, überlegt man ferner, dass ein länger als erwartungsgemäß stattfindendes Activ- oder am Lebenbleiben der Beitragleistenden, also eine über die Erwartung dauernde Prämienzahlung, sowie jede zu einem höheren Zinsfuß als dem Angenommenen vollzogene Capitalsanlage Gewinn und umgekehrt Verlust bedeutet, so wird man es gerechtfertigt finden, wenn auch der durch alle in Kraft stehenden Versicherungen erzielte Gewinn oder Verlust ermittelt wird. Dieser Gewinn oder Verlust bildet das Maß, ob und wie weit factischer Erfolg und Erwartung sich decken. Bei Vereinen mit Gegenseitigkeit, zu welchen im Falle versicherungstechnischer Gebarung auch die humanitären Institute der obenbezeichneten Art gehören würden, wird der erhaltene Gewinn als Super-

reserve zur Deckung allfälliger, künftiger Abweichungen im entgegengesetzten Sinne aufbewahrt; im Falle sich aber fortwährende Überschüsse ergeben, kann die Revision der Rechnungsgrundlagen und auf Grund derselben eine Reduction der Prämiensätze vorgenommen werden.

Dementsprechend bilanzirt man derart, dass man zu Ende irgend eines Rechnungsjahres den baaren Wert der zukünftigen Ausgaben, u. zw. den gegenwärtigen Wert der erworbenen und der zu erwerbenden Ansprüche als Passiva gegenüberstellt dem Vereinsvermögen und dem baaren Werte der zukünftigen Einnahmen (Prämienzahlungen). Die versicherungstechnische Bilanz gibt sohin Anschluss nicht nur über den gegenwärtigen Stand, sondern auch über das Verhältnis der Gesamtheit der Verpflichtungen für alle Zukunft zu den Mitteln für ihre Bedeckung. Hieraus ergibt sich, wie unzuverlässig, ja geradezu täuschend die Folgerungen sind, welche nur zu häufig von den Verwaltungen derartiger humanitärer Institute für Invaliden-, Witwen- und Waisenversorgung aus der lediglich buchhalterisch erhobenen Fondsgebarung, respective aus der für zulänglich gehaltenen Höhe oder dem Anwachsen des Fondes, insbesondere in den ersten Jahrzehnten der Existenz des Institutes gezogen werden.

Was die einzelnen Posten der technischen Bilanz eines Versicherungsvereines anbelangt, so nennt man den Mehrbetrag der Passiva über den Wert der zukünftigen Einnahmen die Prämienreserve. Dieselbe stellt sowohl der einzelnen Versicherung, wie auch der Gesamtheit der Versicherungen gegenüber den Wert der eingegangenen Verpflichtungen des Vereines dar. Vergleicht man die rechnungsmäßige Prämienreserve daher mit dem angesammelten Vereinsvermögen, vorausgesetzt, dass dieses nur infolge geleisteter Prämien entstanden ist, so zeigt sich die Prämienreserve entweder grösser oder kleiner als dieses Vermögen. Je näher das Vermögen eines Versicherungsvereines der berechneten Prämienreserve kommt, desto besser sind die gemachten Annahmen mit der Wirklichkeit im Einklange.

Hienach ist die Prämienreserve keineswegs jenes unantastbare Stammcapital vieler hier in Betracht kommender Institute mit Invaliden-, Witwen- und Waisenversorgung ohne versicherungstechnische Basis, von welchem nur die Zinsen zur Bestreitung fälliger Ansprüche verwendet werden dürfen, sie dient vielmehr in ihrem ganzen Umfange als verzinsliches Capital dazu, der Abwicklung fälliger Versicherungen und der Forderung auf Rückerstattung des durch die getragene Gefahr nicht verbrauchten Theiles der geleisteten Einzahlungen bei Aufhebung der Versicherung vor Eintritt des versicherten Ereignisses gerecht zu werden. Bei

Versicherungsvereinen können also nur Geschenke, Vermächtnisse, Subventionen u. dergl. als unangreifbares Stammcapital normirt werden.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die Bilanzirung der Versicherungsvereine ergibt sich die Nothwendigkeit, auf die Berechnung der Prämienreserve näher einzugehen.

II. Prämienreserve einzelner Versicherungen.

Wenn eine Rentenversicherung, z. B. die Versicherung eines constanten oder steigenden Anspruches auf Invaliditäts-, respective Witwenrente, mittels einmaliger Prämienzahlung abgeschlossen wird, so ist die Prämienreserve nach 1, 2, 3, ... m , ... Jahren ebenso groß, als die einmalige Prämie derselben Versicherung aber für das um 1, 2, 3, ... m , ... Jahre spätere Alter.

Denn, wenn einer x -jährigen Person die Zahlung der dem Alter x entsprechenden einmaligen Prämie zusteht, so muss nach den durchgeführten mathematischen Entwicklungen unter gleichen Verhältnissen für eine $(x+m)$ -jährige Person die dem Alter: $x+m$ zugehörige einmalige Prämie gentigen, um den gestellten Anforderungen gerecht zu werden.

Die einmalige Prämie, durch deren sofortige Leistung ein x -jähriger Activer den unmittelbaren Anspruch auf die constante Invaliditätsrente von jährlich 1 erwerben kann, ist:

$$P_x = \frac{\sum (D_{x+1}^J \cdot R_{x+1}^i)}{D_x^a};$$

demnach hat die Prämienreserve nach Ablauf von m Versicherungsjahren, d. h. am Schlusse des m^{ten} Versicherungsjahres und im Falle, als der dann $(x+m)$ -jährige Mann sich noch im Zustande der Activität befindet, den Wert:

$$\text{res.}_m(P_x) = P_{x+m} = \frac{\sum (D_{x+m+1}^J \cdot R_{x+m+1}^i)}{D_{x+m}^a},$$

denn jeder $(x+m)$ -jährige Active hätte den Betrag P_{x+m} zu zahlen, um den Anspruch auf die Invaliditätsrente von jährlich 1 zu erlangen.

Wäre der bei Beginn der Versicherung x -jährige Active im Laufe der bezeichneten m Jahre invalid geworden, so ist, wie aus der Ableitung der Formel P_x hervorgeht, die Prämienreserve nach m Jahren:

$$\text{res.}_m(P_x) = R_{x+m}^i,$$

und R_{x+m}^i ist der gegenwärtige Wert der jährlich anticipativen Leibrente: 1 für einen $(x+m)$ -jährigen Invaliden.

Bekanntlich wird von einem Ehepaare, bei welchem der Mann x , die Frau y Jahre alt ist, der unmittelbare Anspruch auf die constante jährliche Witwenrente: 1 durch die einmalige Prämie:

$$U_{x,y} = R_y - R_{x,y}$$

erworben. Wenn zu Ende des m^{ten} Jahres dieser Versicherung Mann und Frau noch am Leben sind, so muss als Prämienreserve vorhanden sein:

$$\text{res. } (U_{x,y}) = U_{x+m, y+m} = R_{y+m} - R_{x+m, y+m},$$

wobei R_{y+m} den baaren Wert der jährlich anticipativen Leibrente: 1 für die um m Jahre ältere Frau, und $R_{x+m, y+m}$ den baaren Wert der jährlich anticipativen Verbindungsrente: 1 für das um m Jahre ältere Ehepaar vorstellt.

Ist innerhalb der genannten m Versicherungsjahre der Mann gestorben, und ist die Witwe nach m Jahren noch am Leben, so ergibt sich als Prämienreserve zu dieser Zeit:

$$\text{res. } (U_{x,y}) = R_{y+m}.$$

Wenn bei Abschluss der bezüglichen Versicherungen ε Carenzjahre vorausgesetzt werden, so sind die innerhalb dieser Jahre entstandenen Invaliden oder Witwen vom Rentenbezüge ausgeschlossen und ist bei Bestimmung der Prämienreserve nach x Jahren von Wichtigkeit, ob dieser Zeitpunkt noch in der Carenzzeit oder hinter derselben liegt.

Ist beispielsweise $\varepsilon > x > 0$, d. h. sind die Prämienreserven der einmaligen Prämien: ${}^{\varepsilon}P_x$ und ${}^{\varepsilon}U_{x,y}$ für einen Zeitpunkt anzugeben, welcher in die Carenzzeit fällt, so ergibt sich, da nach Ablauf von x Jahren noch $(\varepsilon - x)$ Carenzjahre zurückzulegen sind, am Ende des x^{ten} Versicherungsjahres als Prämienreserve für die bezeichnete Invalidenversicherung:

$$\text{res. } ({}^{\varepsilon}P_x) = {}^{\varepsilon-x}P_{x+x},$$

wenn der um x Jahre ältere Mann activ verbleibt und für die oben genannte Witwenversicherung die Prämienreserve:

$$\text{res. } ({}^{\varepsilon}U_{x,y}) = {}^{\varepsilon-x}U_{x+x, y+x},$$

wenn das um x Jahre ältere Ehepaar noch am Leben ist. Ist während der x Versicherungsjahre die Invalidität des versicherten Activen oder der Tod des Ehegatten erfolgt, so ergibt sich:

$$\text{res. } ({}^{\varepsilon}P_x) = 0 = \text{res. } ({}^{\varepsilon}U_{x,y}).$$

Wir erhalten den Satz: „Wurde die Versicherung des Anspruches auf die Invaliden-, respective Witwenrente von jährlich 1 durch Zahlung der einmaligen Prämie mit ε Carenzjahren abgeschlossen, so ist die Prämienreserve nach x Jahren, wenn das versicherte Ereignis während der Carenzzeit eingetreten ist, Null, in jedem anderen Falle von $x < \varepsilon$ immer die einmalige Prämie der um x Jahre älteren Personen aber mit Berücksichtigung von nur $\varepsilon - x$ Carenzjahren.“

Aus dem Gesagten folgt ohneweiters, dass, sobald x die Werte $m \leq \varepsilon$ annimmt, die Prämienreserve von ${}^{\varepsilon}P_x$ am Ende des m^{ten} Jahres:

$$\text{res. } ({}^{\varepsilon}P_x) = P_{x+m}$$

ist, wenn der $(x+m)$ -jährige Mann sich noch im Zustande der Activität befindet, und die Prämienreserve von ${}^{\varepsilon}U_{x,y}$ zur selben Zeit:

$$\text{res. } ({}^{\varepsilon}U_{x,y}) = U_{x+m,y+m}$$

ist, wenn das um m Jahre ältere Ehepaar dann noch lebt. Da P_{x+m} und $U_{x+m,y+m}$ die einmaligen Prämien für die um m Jahre höheren Alter unter Voraussetzung eines sofort beginnenden Anspruches vorstellen, so kann man den Satz aussprechen: „Sobald die angenommene Carenzzeit zurückgelegt ist, gelten für die Berechnung der Prämienreserven aller dann noch in Kraft stehenden Versicherungen dieselben Grundsätze, welche im Vorstehenden für einmalige Prämien ohne Carenzzeit dargelegt wurden.“

In der Regel werden die hier in Betracht kommenden Versicherungen nicht auf Grund einmaliger Prämienzahlung, sondern unter der Bedingung abgeschlossen, dass bis zum Eintritte eines bestimmten Ereignisses jährlich oder monatlich gleich bleibende Prämien zu leisten sind.

Die Prämienreserve nach m Jahren von einer Versicherung mit jährlicher Prämienzahlung berechnet man, indem man von der einmaligen Prämie, welche derselben Versicherung aber einem um m Jahre höheren Alter des oder der Versicherten entspricht, das Product abzieht, welches gebildet wird aus der beim Abschluss der Versicherung erforderlich gewesen Jahresprämie und dem baaren Werte derjenigen Rente von jährlich 1, welche einem um m Jahre höheren Alter entspricht und mit demselben Ereignisse aufhört wie die bezeichnete Jahresprämie.

Nach früher angedeuteten Grundsätzen ist es für die Abwicklung einer Versicherung ganz gleichgiltig, ob eine einmalige oder jährliche Prämienzahlung erfolgte. Wenn die jährlichen Prämienzahlungen also innerhalb der angenommenen m Jahre bedingungsgemäß aufgehört hätten, müsste am Schlusse des m^{ten} Jahres eine Prämienreserve vorhanden sein, welche der einmaligen Prämie dieser Versicherung für ein

um m Jahre höheres Alter gleichkommt. Ist das Ereignis, mit welchem die Jahresprämien aufhören, weder innerhalb jener m Jahre noch mit Schluss des m^{ten} Versicherungsjahres eingetroffen, so wird bei Bestimmung der Prämienreserve von der bezeichneten einmaligen Prämie der baare Wert der vom Ende des m^{ten} Jahres noch zu zahlenden Jahresprämien, das heißt das oben erwähnte Product abzurechnen sein.

Nunmehr schreiten wir zur Anwendung der gegebenen Regel auf einige specielle Fälle von Rentenversicherungen mit jährlicher Prämienzahlung.

Bekanntlich berechnete sich die anticipative und auf die ganze Activitätsdauer eines x -jährigen Activen zahlbare Jahresprämie zur Erwerbung des unmittelbaren Anspruches auf die constante jährliche Invaliditätsrente: 1 nach der Formel:

$$p_x = \frac{P_x}{R_x^a} = \frac{\Sigma(D_{x+1}^j \cdot R_{x+1}^i)}{\Sigma D_x^a},$$

wenn P_x der gegenwärtige Wert des unmittelbaren Anspruches auf die jährliche Invaliditätsrente: 1 (einmalige Prämie) und R_x^a der gegenwärtige Wert der jährlich vorhinein zahlbaren Activitätsrente: 1 ist. Man erhält als Prämienreserve dieser Versicherung nach m Jahren, wenn sich der Versicherte zu dieser Zeit noch in Activität befindet, wie folgt:

$$\text{res. } (p_x) = P_{x+m} - p_x \cdot R_{x+m}^a,$$

wobei P_{x+m} die betreffende einmalige Prämie und R_{x+m}^a den baaren Wert der bezüglichen Activitätsrente: 1 für das um m Jahre höhere Alter des Activen bedeutet. Dieser Ausdruck lässt sich, da die Relation:

$$P_{x+m} = p_{x+m} \cdot R_{x+m}^a$$

besteht, auch schreiben:

$$\text{res. } (p_x) = (p_{x+m} - p_x) \cdot R_{x+m}^a,$$

welche Gleichung eine zweite Art und Weise der Berechnung der Prämienreserve nach m Jahren, und zwar für den Fall darstellt, als nur die jährlichen Prämien und die Activitätsrentenwerte von 1 bekannt wären.

Wenn P_x dieselbe Bedeutung wie oben hat, und ${}^nR_x^a$ den baaren Wert einer jährlich vorhinein zahlbaren, aber nach n Activitätsjahren aufhörenden Activitätsrente von 1 ausdrückt, so berechnet sich die anticipative und auf die Dauer von maximal n Activitätsjahren zahlbare

Jahresprämie $p_x^{(n)}$ zur Erwerbung des unmittelbaren Anspruches auf die constante, jährliche Invaliditätsrente von 1 nach der Formel:

$$p_x^{(n)} = \frac{P_x}{{}_n\mathfrak{R}_x^a}.$$

Als Prämienreserve einer solchen Versicherung nach m Jahren ergibt sich, solange $m < n$ ist, und der Versicherte noch in Activität steht:

$$\text{res. } (p_x)_m^{(n)} = P_{x+m} - p_x \cdot {}^{n-m}\mathfrak{R}_{x+m}^a,$$

wobei ${}^{n-m}\mathfrak{R}_{x+m}^a$ den baaren Wert der bezüglichen, nunmehr nach $n-m$ Jahren aufhörenden Activitätsrente: 1 und für das um m Jahre höhere Alter ausdrückt. Ist $m \leq n$, d. h. sind Jahresprämien nicht mehr zu zahlen, befindet sich der Versicherte aber noch in Activität, so hat man selbstverständlich:

$$\text{res. } (p)_m^{(n)} = P_{x+m}$$

zu setzen.

Bezeichnet man mit eP_x die einmalige Prämie zur Erwerbung des Anspruches auf die Invaliditätsrente: 1 unter Voraussetzung von ε Carenzjahren, so bestimmt man die während der ganzen Activität zahlbare anticipative Jahresprämie ep_x aus der Beziehung:

$${}^ep_x = \frac{{}^eP_x}{R_x^a},$$

und es ist, wenn die Zeit der Berechnung der Prämienreserve noch in die Carenzzeit fällt, also in dem Falle als $m = z < \varepsilon$ ist, die Prämienreserve eines nach z Jahren noch activen Mannes:

$$\text{res. } ({}^ep_x)_m = {}^{\varepsilon-z}P_{x+z} - {}^ep_x \cdot R_{x+z}^a,$$

wobei ${}^{\varepsilon-z}P_{x+z}$ die einmalige Prämie derselben Versicherung für das um z Jahre höhere Alter aber unter Zugrundelegung von nur $(\varepsilon - z)$ Carenzjahren bedeutet. Diese einmalige Prämie geht über in diejenige ohne Carenzzeit P_{x+m} , wenn $m = z \leq \varepsilon$ wird, d. h. sobald die Prämienreserve erst nach Ablauf der ε Carenzjahre zu berechnen ist.

Wenn die Versicherung des Anspruches auf die Invaliditätsrente von jährlich 1 nicht nur unter der Voraussetzung von ε Carenzjahren, sondern auch unter der Bedingung abgeschlossen wurde, dass die jährlichen Prämien höchstens n Activitätsjahre zu zahlen sind, so lässt sich nach Früherem die Prämienreserve eines nach m Jahren noch activen

Mannes sofort angegeben. Drückt man durch: ${}^{\varepsilon}p_x^{(n)}$ die betreffende anticipative Jahresprämie aus, so hat man, wenn $m < \varepsilon$ ist:

$$\text{res. } ({}^{\varepsilon}p_x)^{(n)} = {}^{\varepsilon-m}P_{x+m} - {}^{\varepsilon}p_x \cdot {}^{n-m}R_{x+m}^a,$$

und wenn $m \leq \varepsilon$ aber $< n$ ist:

$$\text{res. } ({}^{\varepsilon}p_x)^{(n)} = P_{x+m} - {}^{\varepsilon}p_x \cdot {}^{n-m}R_{x+m}^a.$$

Wie schon früher erwähnt wurde, ist es für die Abwicklung einer Versicherung gleich, ob eine jährliche oder einmalige Prämienzahlung erfolgte. Wenn in einem der citirten Fälle also das Ereignis, mit welchem bedingungsgemäß die Jahresprämien aufhören, zur Zeit der Prämienreservenberechnung bereits eingetreten ist, so hat man jene Regeln zu beobachten, welche im Vorstehenden für Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung angeführt wurden.

Bezüglich der Bestimmung der Prämienreserven von Versicherungen constanter Witwenrenten mit jährlicher Prämienzahlung gelten im Allgemeinen dieselben Grundsätze wie für die Versicherung constanter Invaliditätsrenten bei Zahlung von Jahresprämien. Wir beschränken uns daher nur auf die wesentlichsten Fälle.

Die anticipative und auf die Dauer des gleichzeitigen Lebens eines x -jährigen Mannes und einer y -jährigen Frau zahlbare Jahresprämie zur Erwerbung des unmittelbaren Anspruches auf die constante jährliche Witwenrente: 1 wurde im Früheren durch:

$$u_{x,y} = \frac{U_{x,y}}{R_{x,y}}$$

bezeichnet, worin $U_{x,y}$ die diesbezügliche einmalige Prämie und $R_{x,y}$ den baaren Wert der betreffenden jährlich-anticipativen Verbindungsrente: 1 für das genannte Ehepaar vorstellt. Wenn am Ende des m^{ten} Jahres dieser Versicherung die beiden Ehegatten noch am Leben sind, berechnet sich die Prämienreserve zu dieser Zeit mit:

$$\text{res. } (u_{x,y}) = U_{x+m,y+m} - u_{x,y} \cdot R_{x+m,y+m},$$

und bedeutet dann $U_{x+m,y+m}$ die einmalige Prämie derselben Versicherung und $R_{x+m,y+m}$ den baaren Wert der jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1 für das um m Jahre ältere Ehepaar. Da die Relation besteht:

$$U_{x+m,y+m} = u_{x+m,y+m} \cdot R_{x+m,y+m},$$

so hat man für die Berechnung dieser Prämienreserve auch die Form:

$$\text{res. } (u_{x,y}) = (u_{x+m,y+m} - u_{x,y}) \cdot R_{x+m,y+m},$$

wenn $u_{x+m, y+m}$ die anticipative Jahresprämie für dieselbe Versicherung aber für das um m Jahre höhere Alter des Ehepaares ausdrückt.

Erfolgt die jährlich-anticipative Prämienzahlung zur Erwerbung des unmittelbaren Anspruches auf die constante Witwenrente von jährlich 1 nicht auf die ganze Dauer des gleichzeitigen Lebens der beiden Ehegatten, sondern nur während der Activität des Mannes, und wenn die Frau solange lebt, so gelangt man zu ähnlichen Ausdrücken für die Prämienreserve nach m Jahren wie oben.

Bezeichnet man mit $u_{x,y}^a$ die anticipative Jahresprämie, zahlbar auf die Dauer der Activität eines x -jährigen Activen, und wenn die y -jährige Frau so lange lebt, ferner für das um m Jahre ältere Ehepaar mit $R_{x+m, y+m}^a$ den baaren Wert der jährlich anticipativen Verbindungsrente von 1, welche mit denselben Ereignissen aufhört, wie die Jahresprämie, so erhält man ohneweiters:

$$\text{res. } (u_{x,y}^a)_m = U_{x+m, y+m} - u_{x,y}^a \cdot R_{x+m, y+m}^a,$$

wenn nach Ablauf dieser m Jahre die beiden Ehegatten noch leben, und der Mann sich noch in Activität befindet.

Würden nun die bezeichneten Witwenversicherungen unter der Voraussetzung von Carenzjahren oder unter der Bedingung abgeschlossen, dass die Jahresprämien nur eine bestimmte Anzahl Versicherungsjahre zu leisten sind, so wird man hinsichtlich der Zeit, zu welcher die Prämienreserve bestimmt werden soll, jene Regeln beachten müssen, welche für ähnliche Fälle der Invalidenversicherung nach dem Früheren gelten. Was aber die Berechnung der Prämienreserve anbelangt, wenn jenes Ereignis eingetreten ist, welches das Aufhören der Prämienzahlung bedingt, so hat man es, solange das Ehepaar noch lebt, bekanntlich mit den einmaligen Prämien der bezüglichen Witwenversicherungen, und sobald nur die Witwe noch lebt, mit den Leibrentenwerten der Frauen, u. zw. immer unter Berücksichtigung der betreffenden höheren Alter zu thun.

Den Versicherungen constanter Invaliditäts- und Witwenrenten liegen, wie bekannt, in vielen Fällen nicht Jahresprämien, sondern anticipative Monatsprämien zu Grunde.

Handelt es sich also um die Bestimmung der Prämienreserve für die bezeichneten Versicherungen mit monatlicher Prämienzahlung, so leuchtet ein, dass man, so lange eben die Verpflichtung der Prämienzahlung dauert, einfach in den früher erhaltenen Formeln an Stelle der in Verwendung kommenden jährlich-anticipativen Rentenwerte von 1 die baaren Werte monatlich vorhinein zahlbarer Renten von 1 zu substituieren hat, überdies wird man die anticipativen Jahresprämien in den genannten

Formeln durch die jährliche Summe der anticipativen Monatsprämien ersetzen müssen.

In den speciellen Fällen endlich, wo die Versicherung constanter Invaliditäts- und Witwenrenten nicht unter der Bedingung anticipando, sondern unter der Bedingung postnumerando zahlbarer, terminlicher Prämien abgeschlossen wurde, haben bei der Reservenberechnung immer diejenigen corrigirten Rentenwerte von 1 in Anwendung zu kommen, durch welche die Postnumerandozahlung zum Ausdrucke gelangt.

Wenn die Prämienreserve für Versicherungen steigender Ansprüche auf Invaliditäts-, resp. Witwenrente bestimmt werden soll, so bleiben die bisher angeführten Regeln im Principe bestehen. Aus der Natur der Sache folgt jedoch, dass hiezu mancherlei Erläuterungen nothwendig werden.

Während nämlich die Prämienreserve nach m Jahren für die Versicherung eines constanten Rentenanspruches nach einmaliger Prämienzahlung einfach die einmalige Prämie derselben Versicherungssumme aber für das um m Jahre höhere Alter der Versicherten war, wird bei steigenden Rentenansprüchen der Wert der bezüglichen Versicherung nach m Jahren auf andere Weise gefunden. Hinsichtlich der noch nicht in Abwicklung begriffenen Versicherungen kommt die Anzahl der zurückgelegten Versicherungsjahre und der nach der Pensions-(Provisions-)scala bereits erworbene Anspruch in erster Linie, die noch zu erwartende Steigerung jenes Ausmaßes in zweiter Linie in Betracht; rücksichtlich der sich bereits abwickelnden Versicherungen ist von Wichtigkeit der Zeitpunkt, mit welchem die Abwicklung innerhalb der betreffenden m Jahre begann, d. h. die Höhe der zuerkannten, jährlichen Rente.

Wie anderweitig erwähnt wurde, kann das Steigen der Invaliden- und Witwenrenten unter mannigfaltigen Bedingungen vor sich gehen, zumeist lassen sich die Scalen und bei den Bruderladen die sogenannten Normalien für das Steigen der Renten (Pensionen, Provisionen) auf die folgende Form bringen:

Nach ε	anrechenbaren Versicherungsjahren die jährliche Rente φ_{ε} ,				
" $\varepsilon + 1$	"	"	"	"	" $\varphi_{\varepsilon+1}$,
" $\varepsilon + 2$	"	"	"	"	" $\varphi_{\varepsilon+2}$,
" $\varepsilon + 3$	"	"	"	"	" $\varphi_{\varepsilon+3}$,
u. s. f.					

Diese Scala (Normale) einer steigenden Rentenversicherung kann offenbar auf eine große Anzahl constanter Rentenversicherungen zurückgeführt werden, welche von den Versicherten zu gleicher Zeit abzuschließen und dem Eintrittsalter entsprechend zu berechnen sind.

Hiernach wäre zu versichern:

Die constante jährliche Rente: φ_ε mit ε Carenzjahren,

" " " " : $\varphi_{\varepsilon+1} - \varphi_\varepsilon$ " $\varepsilon + 1$ "

" " " " : $\varphi_{\varepsilon+2} - \varphi_{\varepsilon+1}$ " $\varepsilon + 2$ "

" " " " : $\varphi_{\varepsilon+3} - \varphi_{\varepsilon+2}$ " $\varepsilon + 3$ "

u. s. f. bis zum Ende der Pensions-, Provisionsscala. Die einmalige Prämie oder der baare Wert Θ_z der wie oben steigenden Rentenversicherung würde für das Eintrittsalter z des oder der Versicherten gefunden, wenn man die für ein und dasselbe Alter z ermittelten einmaligen Prämien der Ansprüche auf die constante jährliche Rente: φ_ε mit ε Carenzjahren, auf die constante jährliche Rente: $\varphi_{\varepsilon+1} - \varphi_\varepsilon$ mit $\varepsilon + 1$ Carenzjahren, auf die constante jährliche Rente: $\varphi_{\varepsilon+2} - \varphi_{\varepsilon+1}$ mit $\varepsilon + 2$ Carenzjahren u. s. f. addirt.

Wir bezeichnen die Summe dieser einmaligen Prämien mit Θ_z und fragen uns, wie groß die Prämienreserve dieser Versicherung nach μ Jahren ist, wenn das Ereignis, mit welchem die Abwicklung der Versicherung beginnt, zu dieser noch nicht eingetreten ist.

Ist in diesem Falle $\mu = z \geq \varepsilon$, so hat man, um für das nunmehr höhere Alter: $z + z$ den Wert $\Theta_{(z+z)}$ der Versicherung zu berechnen, nach dem Vorausgegangenen offenbar:

Die einmalige Prämie für eine constante jährliche Rente:

φ_ε mit $\varepsilon - z$ Carenzjahren,

$\varphi_{\varepsilon+1} - \varphi_\varepsilon$ " $\varepsilon - z + 1$ "

$\varphi_{\varepsilon+2} - \varphi_{\varepsilon+1}$ " $\varepsilon - z + 2$ "

$\varphi_{\varepsilon+3} - \varphi_{\varepsilon+2}$ " $\varepsilon - z + 3$ "

u. s. f. sämtlich für ein und dasselbe Alter $z + z$ zu bestimmen und zu addiren. Ist jedoch $\mu = z \leq \varepsilon$, so sind naturgemäß die einmaligen Prämien:

Für eine constante jährliche Rente: φ_μ mit 0 Carenzjahren,

" " " " : $\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu$ " 1 "

" " " " : $\varphi_{\mu+2} - \varphi_{\mu+1}$ " 2 "

" " " " : $\varphi_{\mu+3} - \varphi_{\mu+2}$ " 3 "

u. s. f. sämtlich für ein- und dasselbe Alter $z + \mu$ zu berechnen und zu addiren. In diesem Sinne ist die symbolische Form der Prämienreserve nach μ Jahren:

$$\text{res.}(\Theta_z) = \Theta_{(z+\mu)}$$

einer steigenden Invaliditäts- oder Witwenversicherung, welche für das Alter z und auf Grund der einmaligen Prämie Θ_z abgeschlossen wurde, aufzufassen,

Wie aus dieser allgemeinen Betrachtung hervorgeht, müssen, um nach der angeführten exacten Methode in jedem speciellen Falle steigender Rentenversicherungen zu den entsprechenden Zahlenwerten der Prämienreserven nach μ Jahren zu gelangen, für alle Alter des Versicherten (Activen) oder der Versicherten (Mann und Frau) die ausführlichsten Wertberechnungen unmittelbarer und aufgeschobener Ansprüche constanter Invaliditäts-, respective Witwenrenten von jährlich 1 vorliegen, d. h. es müssen die einmaligen Prämien zur Erwerbung des Anspruches auf die constante jährliche Rente: 1 für alle Alter und unter der Voraussetzung von 0, 1, 2, 3, . . . ε , $\varepsilon+1$, $\varepsilon+2$, . . . Carenzjahren u. s. f. bis zum Ende der Scala bekannt sein.

Wäre nicht die einmalige Prämie Θ_z , sondern z. B. die anticipative Jahresprämie \mathfrak{S}_z für die bezügliche Versicherung zu zahlen, und diese Jahresprämie, wenn Ω_z für das Alter z den baaren Wert einer dem Charakter der zu zahlenden Jahresprämie \mathfrak{S}_z entsprechenden, jährlich anticipativen Rente von 1 ausdrückt, auf Grund einer bekannten Relation:

$$\mathfrak{S}_z = \frac{\Theta_z}{\Omega_z}$$

berechnet worden, so hätte man, wenn nach μ Jahren das versicherte Ereignis nicht eingetreten ist, also noch Jahresprämien zu leisten sind, als Prämienreserve in die Bilanz einzustellen:

$$\text{res.}(\mathfrak{S}_z) = \Theta_{(z+\mu)} - \mathfrak{S}_z \cdot \Omega_{z+\mu},$$

worin $\Omega_{z+\mu}$ für das höhere Alter $z+\mu$ den baaren Wert derjenigen anticipativen Rente von jährlich 1 vorstellt, welche mit demselben Ereignisse zu laufen aufhört, wie die Jahresprämie \mathfrak{S}_z .

Die Berechnung der bezüglichen Prämienreserve ist bedeutend einfacher, wenn die Renten nach μ Jahren bereits flüssig sind. Die auf Grund der bekannten Anzahl anrechenbarer Versicherungsjahre bestimmte Höhe der jährlichen Invaliditäts-, respective Witwenrente wird dann einfach mit dem bezüglichen Leibrentenwerte von jährlich 1 des höheren Alters multiplicirt.

III. Prämienreserve einer grossen Anzahl von Versicherungen.

Ist nicht die Prämienreserve einer einzelnen Versicherung zu bestimmen, hat man es zum Zwecke der Kenntnissnahme des Standes eines Versicherungsvereines und behufs Beurtheilung der Möglichkeit der dauernden Erfüllbarkeit der Verpflichtungen mit einer Gesamtheit von Versicherungen zu thun, für welche am Schlusse irgend eines Rechnungsjahres die Reservenrechnung durchzuführen ist, so wird man, wie im



Abschnitt I dieses Paragraphes erwähnt wurde, ein summarisches Verfahren anwenden, welches nunmehr auf Grund des Abschnittes II des selben Paragraphes näher erörtert werden soll.

Nachdem etwa eine zweckentsprechende Gruppierung der gleichartigen Versicherungen veranlasst wurde, wird man zunächst den baaren Wert der zukünftigen Ausgaben des Vereines, d. i. den gegenwärtigen Wert der erworbenen und der zu erwerbenden Ansprüche berechnen. Bei constanten Rentenversicherungen wird man immer die Summe derjenigen einmaligen Prämien bilden, welche zu Ende des angegebenen Rechnungsjahres zu erlegen wären, um die flüssigen und die noch nicht flüssigen Renten für das gegenwärtige Alter zu sichern, und was die steigenden Rentenversicherungen anbelangt, so hat man die Summe der baaren Werte der bereits zuerkannten Renten und diejenige der baaren Werte der einzelnen noch steigenden Ansprüche für den Zeitpunkt der angestellten Berechnungen zu suchen.

Um den baaren Wert der zukünftigen Einnahmen des Vereines oder den gegenwärtigen Wert der noch zu erwartenden Prämienzahlungen zu finden, sind die Producte zu summiren, welche entstehen, wenn man die zu zahlenden Jahres-, respective Monatsprämien mit den baaren Werten derjenigen Renten von jährlich 1 multiplicirt, welche dem höheren Alter der Beitragsleistenden und dem Charakter der Prämienzahlung entsprechen, also mit dem Ereignis aufhören, welches das Aufhören der Prämien bedingt.

Es ist klar, dass die Differenz der beiden genannten Summen die verlangte Prämienreserve des Versicherungsvereines am Schlusse des angenommenen Rechnungsjahres darstellt.

§. 8.

Reserve humanitärer Institute ohne versicherungstechnische Basis (Bruderladen, Knappschaftscassen).

(Schluss.)

Es stellt sich öfters die Nothwendigkeit heraus, die Vermögensgebarung solcher Institute zu untersuchen, welche wohl dieselben Zwecke wie die oben in Betracht gezogenen Versicherungsvereine verfolgen, bei denen jedoch das Verhältnis zwischen Leistung und Gegenleistung nicht versicherungstechnisch ermittelt, sondern willkürlich festgesetzt ist.

Soll in einem solchen Falle untersucht werden, inwieweit das vorhandene Vermögen des Institutes und die noch zu erwartenden Ein-

zahlungen der Mitglieder genügen dürften, um den an das Institut zu stellenden Anforderungen, d.h. den fälligen und den noch nicht fälligen Ansprüchen gerecht zu werden, so wird man an der Hand der bestehenden arbiträren Statutenbestimmungen die Reservenrechnung mit möglichster Befolgung der in §. 7 angegebenen exacten Methode vornehmen.

Man hat bei Aufstellung der bezüglichen technischen Bilanz die thatsächlichen Jahreseinzahlungen der einzelnen Mitglieder des Institutes, die bereits zugesprochenen (liquiden) und die erst zu erhoffenden jährlichen Renten (Pensionen, Provisionen) der Betheiligten als Grundlage zu benützen und mit Rücksicht auf das mit Ende des angenommenen Rechnungsjahres stattfindende Alter der Betheiligten so vorzugehen, dass die auf versicherungstechnischem Grundsätzen beruhenden Wertberechnungen sowohl den Statutenbestimmungen als auch der für die Betheiligten in Betracht kommenden Sterblichkeits-, respective Invaliditätsgefahr möglichst entsprechen.

Dieser Vorgang findet Anwendung bei den bestehenden Bergarbeiter-Bruderladen, welche uns in der vorliegenden Schrift besonders interessiren. Ehe jedoch noch ausführlicher auf die Art und Weise der Bilanzirung dieser Institute eingegangen werden kann, muss einiger Umstände Erwähnung gethan werden, welche infolge der bei den Bruderladen herrschenden Verhältnisse und Gepflogenheiten überdies in Betracht kommen.

Während bei Versicherungsvereinen, welche außer der Invaliden-, Witwen- und Waisenversorgung auch die Krankenunterstützung umfassen, für die Invalidenversicherung, für die Witwen- und Waisenversicherung, für die Krankenversicherung getrennte jährliche Prämien gefordert werden, findet dies fast bei allen Instituten ohne versicherungstechnische Grundlage, wozu auch die Bergarbeiter-Bruderladen gehören, nicht statt. Mit kaum nennenswerten Ausnahmen werden bei den Bruderladen die von den sogenannten vollberechtigten Mitgliedern zu leistenden Büchsegelder (Brudergelder) nicht nach den angegebenen drei Versicherungszwecken getrennt, sondern für alle diese Zwecke gemeinschaftlich in einem Betrage und nur während der Activität erhoben.

Dem entsprechend bezieht sich das Vermögen irgend einer Bruderlade auf drei verschiedene Versicherungszweige und umfasst die herzustellende technische Bilanz sonach alle drei Versicherungsarten.

Da den Bruderladen noch sogenannte zahlende Theilnehmer oder Minderberechtigte angehören, welche nur auf Krankenversorgung, auf Pensionirung (Provisionirung), wenn überhaupt, so nur im Falle der Verunglückung im Dienste Anspruch haben, da ferner in der Regel die Werksbesitzer fortlaufende Beiträge leisten, so kommen bei Aufstellung der

technischen Bilanz einer Bruderlade am Ende irgend eines Rechnungsjahres folgende Posten in Betracht:

Activa:

1. Fonds mit Schluss des Jahres 18.		
Wert der zu erwartenden Einzahlungen überhaupt:		
2. Der Mitglieder (Vollberechtigten)		
3. der Theilnehmer (Minderberechtigten)		
4. Wert der Beitragsleistung des Werksbesitzers.		

Passiva:

Wert der liquiden Provisionen (Pensionen):		
1. der Invaliden		
2. der Witwen		
3. der Waisen		
Wert der Provisionsansprüche der Activen:		
4. für sich		
5. für ihre Witwen		
6. für ihre Waisen		
Wert der Provisionsansprüche der Invaliden:		
7. für ihre Witwen		
8. für ihre Waisen		
9. Wert der stabilen Ausgaben		

wobei die der Krankenversorgung entspringenden Auslagen unter die hier sogenannten stabilen Auslagen gezählt werden.

Welche Bedeutung die einzelnen Posten einer solchen Bilanz haben, ergibt sich aus den vorangegangenen Erörterungen über die Reservenvberechnung eines Versicherungsvereines.

Dem zufolge stellen die Activposten 2 und 3 die Summe derjenigen Producte, welche sich ergeben, wenn man das Alter der Beitragleistenden zu Ende des angenommenen Rechnungsjahres eruiert und das durchschnittlich auf ein Jahr entfallende Büchsengeld eines noch

zur Einzahlung verpflichteten Mitgliedes oder Theilnehmers multiplicirt mit dem seinem Alter entsprechenden baaren Werte einer Activitätsrente von jährlich 1, welche den statutenmäßigen Einzahlungsmodalitäten entspricht, d. h. entweder auf die ganze Dauer der Activität oder maximal nur m Activitätsjahre hindurch in gleichen, etwa monatlichen oder vierteljährlichen Nachhinein- oder Vorhineinraten zahlbar ist.

Da nun bei ein und derselben Bruderlade bezüglich der Einhebung der Büchsegelder nicht verschiedene Bestimmungen gelten, wird man jene Producte nicht für jeden einzelnen Beitragleistenden, sondern für ganze Altersgruppen bilden, indem man die Summe der jährlichen Beiträge gleich alter Mitglieder oder Theilnehmer (beziehungsweise mit gleicher bereits zurückgelegter Activitätszeit) aufsucht und mit dem für dieses Alter geltenden Activitätsrentenwerte von 1 multiplicirt.

Bezüglich des Activposten 4 bedenke man, dass die jährlich wiederkehrenden Beitragsleistungen des Werksbesitzers nichts anderes als eine Mehrleistung an jährlichen Büchsegeldern der Arbeiter sind. Man kann daher nach dem Verhältnisse des jährlichen Werksbeitrages zum jährlichen Büchsegeld aller Mitglieder und Theilnehmer denjenigen Bruchtheil bestimmen, welcher an Werksbeitrag auf eine einzelne Person entfällt. Da in demselben Verhältnisse, wie das angegebene, auch der baare Wert der jährlichen Werksbeiträge und der baare Wert der gesammten jährlichen Einzahlungen der Arbeiter stehen, so ergibt sich aus dieser Proportion der Activposten 4 der Bilanz ohneweiters.

Um die Passiva zu bestimmen, hat man sich vorzustellen, als ob die noch in Kraft stehenden Versicherungen der Bruderlade auf Grund einmaliger Prämienzahlung abgeschlossen worden wären. Hierbei betrifft der Wert der liquiden Provisionen alle bereits fälligen, in Abwicklung begriffenen Versicherungen, während der Wert der Provisionsansprüche der Activen und Invaliden sich auf die noch nicht in Abwicklung befindlichen, aber vielleicht später fällig werdenden Versicherungen bezieht.

Wenn also hinsichtlich der Passivposten 1, 2 und 3 die jährlichen Ausmaße der einzelnen, bereits zugesprochenen Provisionen, die Art und Weise der Auszahlung derselben und die Alter der Invaliden, Witwen und Waisen am Schlusse des Rechnungsjahres bekannt sind, so lässt sich mit Hilfe der baaren Werte einer Leibrente von jährlich 1 für Invalide und derjenigen für Frauen, ferner mit Hilfe der baaren Werte einer temporären Rente von jährlich 1 für Kinder und nach Befolgung der im §. 3 enthaltenen und wegen der verschiedenen Auszahlung der Provisionen in Betracht kommenden Regeln der Gesamtwert der liquiden Provisionen angeben, indem man wieder nach Altersgruppen ausmultiplicirt und die Producte addirt.

Handelt es sich um die Passivposten 4 und 5, d. h. um die Berechnung des gegenwärtigen Wertes der Provisionsansprüche der Activen für sich und desjenigen für ihre Witwen, so fragt es sich, ob die Statuten der der Bruderlade constante oder steigende Invaliditäts- und Witwenrenten in Aussicht stellen.

Im ersteren Falle wird man vor Allem das Alter der Activen und dasjenige ihrer etwa lebenden Frauen mit Ende des Rechnungsjahres, ferner die nach den bestehenden Statutenbestimmungen gewährleisteten, constanten jährlichen Ansprüche auf Invaliditäts- und Witwenrenten (Pensionen, Provisionen) eruiern. Hierauf wird man die gefundenen Invalidenprovisionen nach gleichen Altern der Activen addiren und die für je eine Altersgruppe erhaltene Summe mit dem zugehörigen baaren Werte des Anspruches auf die constante, jährliche Invaliditätsrente von 1 multipliciren. Ebenso wird man für alle gleichaltrigen Ehepaare die Summe der eruierten Witwenprovisionen berechnen, und für jede Alterscombination das Product zwischen der betreffenden Summe und dem entsprechenden baaren Werte des Anspruches auf die jährliche Witwenrente von 1 bilden. Durch einfache Addition der bezüglichen Producte gelangt man zu den Passivposten 4 und 5.

Hat man es mit steigenden Provisionsansprüchen zu thun, so ist die Berechnung der Prämienreserve, wie schon aus §. 7, Abschnitt II, hervorgeht, ungleich complicirter und zeitraubender. Man wird, um zu den Passivposten 4 und 5 zu gelangen, vorerst wieder für das Ende des angenommenen Rechnungsjahres die Alter der Activen, respective diejenigen der vorhandenen Ehepaare zu bestimmen haben und dann auf Grund der verschiedenen Pensionsscalen (Provisionsnormalien) und Sonderbestimmungen der Bruderladen für jeden einzelnen Activen, beziehungsweise für jedes einzelne Ehepaar den baaren Wert der Bruderladverpflichtung, u. zw. für den Zeitpunkt der Aufstellung der technischen Bilanz eruiern müssen. Man hat also für jeden Activen, respective für jedes Ehepaar mit Rücksicht auf die bereits zurückgelegte, anrechenbare Activitätsdauer und beziehungsweise unter Berücksichtigung der bisherigen Dauer der Verheirathung den baaren Wert der schon erreichten Ansprüche zu berechnen und zu diesem den baaren Wert der in Zukunft unter den statutenmäßigen Bedingungen noch steigenden Provisionsansprüche zu addiren.

Soll ein so bedeutender Zeitaufwand nicht eintreten, vielmehr ein Resultat schneller erlangt werden, so muss man von diesem correcten Verfahren Umgang nehmen und zu Näherungsmethoden greifen; aber es ist klar, dass sich diese Näherungsmethoden von Fall zu Fall ändern, d. h. nach den bestehenden Statutenbestimmungen ebenso richten müssen, wie

das oben besprochene correcte Verfahren. Solche Näherungsmethoden müssen auch immer derart eingerichtet werden, dass die Fehlergrenze mit Genauigkeit bestimmt werden kann und haben nur dann einen Wert.

Um weiters den Wert der Provisionsansprüche der Invaliden für ihre Witwen, also Passivposten 7 anzugeben, hat man das Alter der verheirateten Invaliden und dasjenige ihrer lebenden Frauen mit Ende des Rechnungsjahres und die den Frauen im Falle der Verwitwung statutengemäß zukommenden jährlichen Provisionen zu bestimmen. Diese Ausmaße, welche in der Regel abhängig sind von der bereits zugesprochenen Provision des Mannes (Invaliden), lassen sich meistens sofort angeben. Sind also für die bezüglichen Alterscombinationen die baaren Werte des Anspruches auf die constante, jährliche Witwenrente: 1 bekannt, so gelangt man in bekannter Weise zu dem gewünschten Gesamtwerte.

Was die Passivposten 6 und 8 betrifft, so nimmt man an, dass mit nur geringer Abweichung bei einer großen Anzahl Versicherungen das Verhältnis des Wertes der Provisionsansprüche der Activen für ihre Witwen zu jenem für ihrer Waisen, ferner das Verhältnis zwischen dem Wert der Provisionsansprüche der Invaliden für ihre Witwen zu dem für ihre Waisen dasselbe sei wie dasjenige des Wertes der liquiden Provisionen der Witwen zum Wert der liquiden Provisionen der Waisen. Wenn das letztere Verhältnis und von den beiden übrigen das erste Glied schon berechnet ist, kann man die fehlenden Glieder, d. h. die Passivposten 6 und 8 ohneweiters angeben.

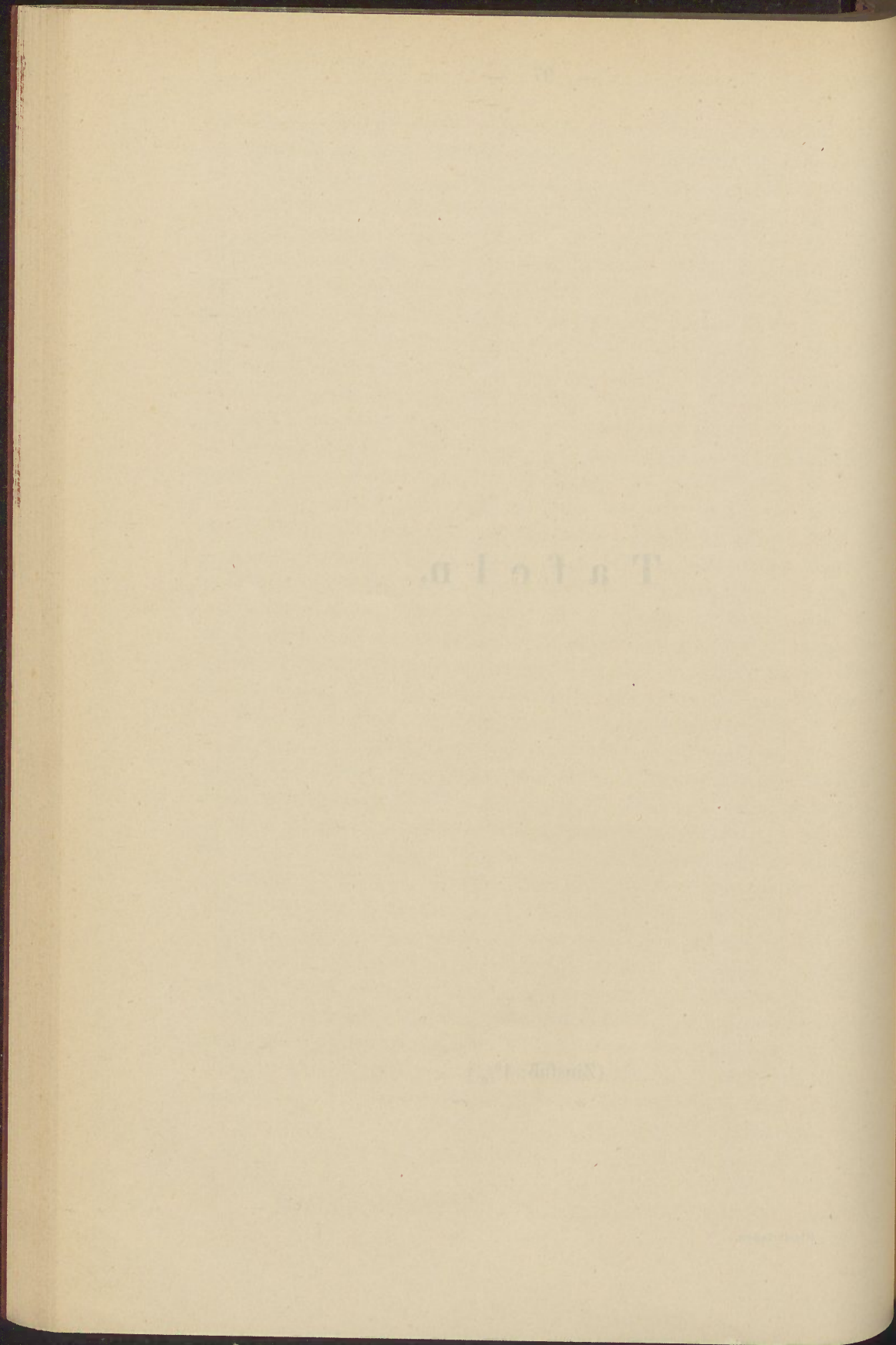
Unter den stabilen Ausgaben (Passivposten 9 der Bilanz) verstehen wir alle Ausgaben der Bruderlade, welche nicht in Invaliden-, Witwen und Waisenrenten bestehen. Zu denselben gehören die Verwaltungskosten, die Kosten der Krankenversorgung (Krankengeld, ärztliche Hilfe, Medicamente), Ausgaben für Schul- und Kirchenzwecke etc. Nachdem die ganze Bilanzberechnung auf dem Stande der Beitragenden der Bruderlade zur Zeit der Bilanzberechnung basirt, sohin den Aussterbeetat zur Voraussetzung hat, so kann die Berechnung des Capitalswertes der künftigen stabilen Auslagen, welche allerdings nur annäherungsweise wird erfolgen können, unter der Annahme geschehen, dass die Summe dieser Ausgaben in demselben Verhältnisse abnimmt, wie die Zahl der Beitragenden. Unter dieser Annahme erhält man den Capitalswert der stabilen Ausgaben, wenn man den Jahresbetrag derselben mit dem Quotienten multiplicirt, welcher sich durch Division des Wertbetrages der Einzahlungen durch den Jahresbetrag derselben ergibt.

T a f e l n.

(Zinsfuß: 4⁰/₀.)

Bruderladen.

7



Tafel I.

Alter	Anzahl der lebenden		Alter	Anzahl der lebenden	
	„Männer überhaupt“	Frauen		„Männer überhaupt“	Frauen
(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
18		100000	60	59384	54944
19		98408	61	57264	53345
20		96954	62	55059	51655
21		95596	63	52769	49867
22		94315	64	50394	47982
23		93098	65	47940	46001
24		91935	66	45413	43926
25	100000	90813	67	42820	41765
26	99380	89724	68	40170	39522
27	98744	88656	69	37474	37210
28	98082	87610	70	34750	34840
29	97396	86576	71	32015	32425
30	96685	85554	72	29291	29987
31	95950	84544	73	26599	27543
32	95192	83547	74	23963	25114
33	94411	82561	75	21406	22720
34	93609	81587	76	18951	20385
35	92776	80624	77	16616	18128
36	91913	79673	78	14419	15971
37	91021	78733	79	12376	13931
38	90102	77804	80	10499	12025
39	89156	76886	81	8795	10265
40	88175	75978	82	7269	8659
41	87161	75082	83	5921	7212
42	86115	74196	84	4748	5926
43	85039	73313	85	3743	4799
44	83925	72433	86	2909	3827
45	82775	71549	87	2004	2979
46	81591	70662	88	1316	2284
47	80368	69765	89	797	1724
48	79106	68858	90	435	1282
49	77801	67935	91	217	930
50	76447	66991	92	97	659
51	75040	66020	93	36	451
52	73577	65016	94	12	307
53	72054	63969	95		190
54	70462	62875	96		108
55	68799	61725	97		54
56	67065	60515	98		27
57	65261	59238	99		9
58	63381	57887			
59	61423	56458			

7*

Tafel II.

Alter	Lebende „Männer überhaupt“	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Discontirte Zahlen	Summe der discontirten Zahlen	Wert der unmittelbaren Leibrente von jährlich 1 für „Männer über- haupt“ (pränumerando)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
15	100000	44·7	55526·5	1117147·7	20·1192
16	99465	43·9	53105·3	1061621·2	19·9909
17	98926	43·2	50786·0	1008515·9	19·8581
18	98383	42·4	48564·7	957729·9	19·7207
19	97837	41·7	46437·7	909165·2	19·5782
20	97288	40·9	44401·1	862727·5	19·4303
21	96732	40·1	42449·3	818326·4	19·2777
22	96171	39·3	40580·0	775877·1	19·1197
23	95605	38·6	38789·5	735297·1	18·9561
24	95033	37·8	37074·5	696507·6	18·7867
25	94455	37·0	35431·7	659433·1	18·6114
26	93869	36·2	33857·6	624001·4	18·4302
27	93269	35·5	32347·3	590143·8	18·2440
28	92643	34·7	30894·4	557796·5	18·0549
29	91995	33·9	29498·4	526902·1	17·8621
30	91324	33·2	28157·0	497403·7	17·6654
31	90630	32·4	26868·3	469246·7	17·4647
32	89914	31·7	25630·8	442378·4	17·2597
33	89176	30·9	24442·7	416747·6	17·0500
34	88418	30·2	23302·8	392304·9	16·8351
35	87632	29·5	22207·4	369002·1	16·6162
36	86816	28·7	21154·4	346794·7	16·3935
37	85974	28·0	20143·5	325640·3	16·1660
38	85106	27·3	19173·2	305496·8	15·9335
39	84212	26·6	18242·1	286323·6	15·6957
40	83286	25·8	17347·6	268081·5	15·4535
41	82328	25·1	16488·5	250733·9	15·2066
42	81340	24·4	15664·1	234245·4	14·9543
43	80324	23·7	14873·5	218581·3	14·6960
44	79271	23·0	14114·0	203707·8	14·4331
45	78185	22·3	13385·2	189593·8	14·1644
46	77067	21·6	12686·4	176209·6	13·8896
47	75912	20·9	12015·6	163522·2	13·6092
48	74720	20·3	11372·0	151506·6	13·3227
49	73487	19·6	10754·2	140134·6	13·0307
50	72208	18·9	10160·6	129380·4	12·7335
51	70879	18·3	9590·01	119219·8	12·4317
52	69497	17·6	9041·37	109629·8	12·1254
53	68059	16·9	8513·75	100588·4	11·8148
54	66555	16·3	8005·39	92074·6	11·5016

Alter	Lebende „Männer überhaupt“	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Discontirte Zahlen	Summe der discontirten Zahlen	Wert der unmittelbaren Leibrente von jährlich 1 für „Männer über- haupt“ (pränumerando)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
55	64984	15·7	7515·80	84069·2	11·1857
56	63346	15·1	7044·57	76553·4	10·8670
57	61642	14·4	6591·41	69508·8	10·5454
58	59867	13·8	6155·40	62917·4	10·2215
59	58017	13·2	5735·76	56762·0	9·8962
60	56091	12·7	5332·06	51026·2	9·5697
61	54089	12·1	4943·99	45694·1	9·2424
62	52006	11·5	4570·77	40750·1	8·9154
63	49843	11·0	4212·17	36179·3	8·5892
64	47600	10·5	3867·91	31967·1	8·2647
65	45282	10·0	3538·03	28099·2	7·9421
66	42895	9·5	3222·62	24561·2	7·6215
67	40446	9·0	2921·76	21338·6	7·3033
68	37943	8·5	2635·53	18416·8	6·9878
69	35396	8·0	2364·05	15·81·3	6·6755
70	32823	7·6	2107·89	13417·2	6·3652
71	30240	7·2	1867·32	11309·3	6·0565
72	27667	6·7	1642·72	9441·95	5·7477
73	25124	6·3	1434·36	7799·23	5·4374
74	22574	5·9	1239·21	6364·87	5·1362
75	19963	5·5	1053·73	5125·66	4·8643
76	17400	5·2	883·117	4071·93	4·6109
77	14863	4·9	725·341	3188·81	4·3963
78	12545	4·7	588·672	2463·47	4·1848
79	10483	4·4	472·993	1874·80	3·9637
80	8698	4·1	377·360	1401·81	3·7148
81	7049	3·8	294·056	1024·45	3·4839
82	5570	3·5	223·421	730·390	3·2691
83	4287	3·3	165·345	506·969	3·0661
84	3215	3·1	119·230	341·624	2·8653
85	2332	2·8	83·1568	222·394	2·6744
86	1633	2·6	55·9915	139·237	2·4868
87	1096	2·4	36·1338	83·2450	2·3038
88	700	2·2	22·1905	47·1112	2·1230
89	421	2·0	12·8327	24·9207	1·9420
90	234	1·8	6·85834	12·0880	1·7625
91	118	1·6	3·32546	5·22961	1·5726
92	52	1·4	1·40909	1·90415	1·3513
93	19	1·0	0·495059	0·495059	1·0000

Tafel III.

Alter	Lebende Frauen	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Discontirte Zahlen	Summe der discontirten Zahlen	Wert der unmittelbaren Leibrente von jährlich 1 für Frauen (pränumerando)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
18	100000	40·4	49362·9	916603	18·569
19	98408	40·0	46708·7	867241	18·567
20	96954	39·6	44248·6	820532	18·544
21	95596	39·1	41950·8	776283	18·505
22	94315	38·7	39796·8	734332	18·452
23	93098	38·1	37772·4	694536	18·387
24	91935	37·6	35865·9	656763	18·312
25	90813	37·1	34065·6	620897	18·227
26	89724	36·5	32362·6	586832	18·133
27	88656	35·9	30747·4	554469	18·033
28	87610	35·4	29216·0	523722	17·926
29	86576	34·8	27760·8	494506	17·813
30	85554	34·2	26378·0	466745	17·695
31	84544	33·6	25064·0	440367	17·570
32	83547	32·9	23815·8	415303	17·438
33	82561	32·3	22629·6	391487	17·300
34	81587	31·7	21502·5	368858	17·154
35	80624	31·1	20431·4	347355	17·001
36	79673	30·4	19413·9	326924	16·840
37	78733	29·8	18447·0	307510	16·670
38	77804	29·1	17528·2	289063	16·491
39	76886	28·5	16655·2	271535	16·303
40	75978	27·8	15825·4	254879	16·106
41	75082	27·1	15037·3	239054	15·897
42	74196	26·4	14288·3	224017	15·678
43	73313	25·7	13575·3	209728	15·449
44	72433	25·0	12896·5	196153	15·210
45	71549	24·3	12249·1	183257	14·961
46	70662	23·6	11632·0	171007	14·701
47	69765	22·9	11042·6	159375	14·433
48	68858	22·2	10479·9	148333	14·154
49	67935	21·5	9941·73	137853	13·866
50	66991	20·8	9426·52	127911	13·569
51	66020	20·1	8932·59	118485	13·264
52	65016	19·4	8458·41	109552	12·952
53	63969	18·7	8002·11	101094	12·633
54	62875	18·0	7562·75	93091·6	12·309
55	61725	17·3	7138·87	85528·8	11·981
56	60515	16·6	6729·74	78389·9	11·648
57	59238	15·9	6334·35	71660·2	11·313
58	57887	15·3	5951·82	65325·9	10·976
59	56458	14·7	5581·63	59374·0	10·637

Alter	Lebende Frauen	Mittlere Lebensdauer	Discontirte Zahlen	Summe der discontirten Zahlen	Wert der unmittelbaren Leibrente von jährlich 1 für Frauen (pränumerando)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
60	54944	14·0	5223·03	53792·4	10·299
61	53345	13·4	4875·99	48569·4	9·961
62	51655	12·8	4539·92	43693·4	9·624
63	49867	12·3	4214·20	39153·5	9·291
64	47982	11·7	3898·95	34939·3	8·961
65	46001	11·2	3594·20	31040·3	8·636
66	43926	10·6	3300·08	27446·1	8·317
67	41765	10·1	3017·04	24146·0	8·003
68	39522	9·7	2745·20	21129·0	7·697
69	37210	9·2	2485·20	18383·8	7·397
70	34840	8·7	2237·42	15898·6	7·106
71	32425	8·3	2002·21	13661·2	6·823
72	29987	7·9	1780·47	11658·9	6·548
73	27543	7·5	1572·46	9878·46	6·282
74	25114	7·2	1378·64	8306·00	6·025
75	22720	6·8	1199·25	6927·36	5·776
76	20385	6·5	1034·62	5728·11	5·536
77	18128	6·2	884·679	4693·49	5·305
78	15971	5·9	749·436	3808·81	5·082
79	13931	5·6	628·567	3059·38	4·867
80	12025	5·3	521·700	2430·81	4·659
81	10265	5·0	428·215	1909·11	4·458
82	8659	4·8	347·326	1480·90	4·264
83	7212	4·5	278·158	1133·57	4·075
84	5926	4·3	219·768	855·411	3·892
85	4799	4·1	171·128	635·643	3·714
86	3827	3·9	131·218	464·515	3·540
87	2979	3·7	98·2140	333·297	3·394
88	2284	3·5	72·4045	235·083	3·247
89	1724	3·3	52·5501	162·679	3·096
90	1282	3·1	37·5743	110·129	2·931
91	930	2·9	26·2091	72·5542	2·768
92	659	2·7	17·8575	46·3451	2·595
93	451	2·5	11·7511	28·4876	2·424
94	307	2·3	7·69145	16·7365	2·176
95	190	2·0	4·57710	9·04503	1·976
96	108	1·8	2·50165	4·46793	1·786
97	54	1·7	1·20272	1·96628	1·635
98	27	1·3	0·578230	0·763560	1·321
99	9	1·0	0·185330	0·185330	1·000

Tafel IV.
 Werte der unmittelbaren Leibrenten mit begrenzter Bezugsdauer von jährlich 1 für Kinder ohne Unterschied
 des Geschlechtes.

Alter	Anzahl der lebenden Kinder	Rentenbezugsdauer bis längstens zum vollendeten									
		12. Lebensjahre		13. Lebensjahre		14. Lebensjahre		16. Lebensjahre		18. Lebensjahre	
		^a jährlich pränum.	^b monatlich postnum.	^a jährlich pränum.	^b monatlich postnum.	^a jährlich pränum.	^b monatlich postnum.	^a jährlich pränum.	^b monatlich postnum.	^a jährlich pränum.	^b monatlich postnum.
(1)	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)	(5)	(5)	(6)	(6)	(7)	(7)
0	10000	7-088	6-732	7-440	7-075	7-775	7-401	8-403	8-014	8-974	8-572
1	7450	8-499	8-218	8-989	8-696	9-458	9-155	10-334	10-008	11-132	10-785
2	7088	8-197	7-942	8-733	8-465	9-247	8-966	10-205	9-900	11-075	10-750
3	6823	7-775	7-543	8-354	8-108	8-909	8-650	9-943	9-658	10-885	10-577
4	6618	7-265	7-057	7-886	7-662	8-480	8-243	9-589	9-323	10-599	10-307
5	6468	6-667	6-480	7-323	7-125	7-959	7-739	9-139	8-891	10-215	9-940
6	6345	6-007	5-835	6-707	6-524	7-378	7-180	8-629	8-399	9-769	9-510
7	6243	5-294	5-151	6-034	5-873	6-742	6-566	8-064	7-853	9-269	9-027
8	6154	4-529	4-409	5-310	5-170	6-058	5-898	7-452	7-259	8-724	8-498
9	6073	3-719	3-622	4-542	4-424	5-330	5-192	6-800	6-627	8-140	7-931
10	6004	2-860	2-786	3-727	3-632	4-555	4-439	6-102	5-948	7-511	7-324
11	5946	1-950	1-904	2-864	2-791	3-733	3-639	5-357	5-223	6-838	6-667
12	5897	1-000	0-975	1-954	1-905	2-866	2-794	4-569	4-456	6-122	5-968
13	5854					1-955	1-905	3-739	3-647	5-365	5-233
14	5815					1-000	0-978	2-868	2-797	4-571	4-455
15	5778							1-955	1-907	3-737	3-643
16	5740							1-000	0-975	2-865	2-793
17	5699									1-954	1-904
18	5655									1-000	0-972
19	5608										

Werte der unmittelbaren Aktivitätsrenten mit begrenzter Bezugsdauer von jährlich 1, zahlbar in gleichen Raten monatlich postnumerando.

Alter	Längste Rentenbezugsdauer durch								
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	Aktivitätsjahre								
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
15	4·47	8·04	10·87	13·10	14·83	16·15	17·12	17·80	18·22
16	4·47	8·04	10·86	13·08	14·80	16·10	17·05	17·70	18·10
17	4·47	8·03	10·85	13·06	14·76	16·04	16·97	17·60	17·97
18	4·47	8·03	10·84	13·04	14·72	15·98	16·88	17·48	17·82
19	4·47	8·02	10·82	13·01	14·67	15·91	16·79	17·35	17·67
20	4·47	8·01	10·81	12·97	14·62	15·84	16·68	17·21	17·50
21	4·46	8·01	10·78	12·93	14·56	15·75	16·57	17·06	17·32
22	4·46	8·00	10·76	12·89	14·50	15·66	16·44	16·90	17·13
23	4·46	7·98	10·73	12·85	14·43	15·56	16·30	16·73	16·91
24	4·46	7·97	10·70	12·80	14·35	15·45	16·15	16·55	16·73
25	4·45	7·96	10·67	12·74	14·27	15·33	15·99	16·35	16·51
26	4·45	7·94	10·64	12·68	14·17	15·20	15·82	16·15	16·28
27	4·44	7·92	10·60	12·61	14·07	15·06	15·64	15·93	16·04
28	4·44	7·90	10·56	12·55	13·97	14·91	15·45	15·70	15·79
29	4·43	7·88	10·51	12·47	13·86	14·75	15·24	15·47	15·54
30	4·43	7·86	10·47	12·40	13·74	14·58	15·04	15·23	15·29
31	4·42	7·84	10·43	12·32	13·61	14·40	14·82	14·98	15·03
32	4·41	7·81	10·38	12·23	13·48	14·21	14·59	14·72	14·76
33	4·41	7·79	10·32	12·13	13·33	14·01	14·34	14·46	14·48
34	4·40	7·76	10·27	12·03	13·17	13·80	14·09	14·18	14·20
35	4·39	7·74	10·20	11·92	13·00	13·58	13·83	13·90	13·92
36	4·39	7·71	10·14	11·80	12·81	13·35	13·56	13·62	13·63
37	4·38	7·68	10·06	11·67	12·62	13·10	13·28	13·32	13·33
38	4·37	7·64	9·98	11·52	12·41	12·84	12·99	13·02	
39	4·36	7·60	9·89	11·36	12·19	12·56	12·68	12·71	
40	4·35	7·56	9·79	11·19	11·95	12·27	12·37	12·39	
41	4·34	7·51	9·68	11·00	11·70	11·97	12·05	12·06	
42	4·32	7·45	9·55	10·80	11·42	11·66	11·72	11·72	
43	4·31	7·39	9·41	10·58	11·14	11·33	11·38		
44	4·29	7·32	9·26	10·35	10·84	11·00	11·04		
45	4·27	7·24	9·10	10·11	10·54	10·67	10·69		
46	4·25	7·15	8·93	9·85	10·23	10·33	10·34		
47	4·22	7·06	8·74	9·59	9·90	9·98	9·99		
48	4·19	6·95	8·54	9·31	9·57	9·63			
49	4·16	6·84	8·33	9·01	9·23	9·28			

(Fortsetzung zu Seite 105).

Alter	Längste Rentenbezugsdauer durch								
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	Activitätsjahre								
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
50	4.13	6.71	8.11	8.71	8.89	8.93			
51	4.09	6.58	7.88	8.41	8.55	8.57			
52	4.04	6.44	7.64	8.09	8.21	8.22			
53	3.99	6.29	7.39	7.78	7.87				
54	3.94	6.14	7.15	7.47	7.54				
55	3.89	5.99	6.89	7.16	7.21				
56	3.83	5.84	6.65	6.87	6.90				
57	3.78	5.68	6.40	6.58	6.60				
58	3.73	5.52	6.15	6.29					
59	3.68	5.36	5.90	6.01					
60	3.62	5.18	5.64	5.73					
61	3.55	4.98	5.37	5.43					
62	3.47	4.77	5.10	5.14					
63	3.38	4.55	4.83						
64	3.28	4.33	4.55						
65	3.17	4.12	4.29						
66	3.08	3.92	4.05						
67	2.98	3.73	3.82						
68	2.88	3.54							
69	2.79	3.37							
70	2.70	3.18							
71	2.61	3.00							
72	2.53	2.83							
73	2.43								
74	2.27								
75	2.13								
76	1.85								
77	1.57								

Werte

der

unmittelbaren Verbindungsrenten von jährlich 1,

zahlbar

auf die Dauer des gleichzeitigen Lebens von Mann und Frau.

(Pränumerando.)

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau										
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
25	15-592	15-628	15-649	15-657	15-654	15-643	15-623	15-595	15-560	15-520	15-473
26	15-479	15-517	15-538	15-547	15-546	15-536	15-517	15-491	15-459	15-420	15-376
27	15-362	15-401	15-423	15-433	15-433	15-425	15-408	15-383	15-352	15-316	15-274
28	15-242	15-281	15-304	15-315	15-317	15-310	15-294	15-271	15-242	15-208	15-168
29	15-118	15-158	15-181	15-194	15-196	15-191	15-176	15-155	15-128	15-096	15-058
30	14-990	15-030	15-055	15-068	15-072	15-067	15-055	15-035	15-010	14-980	14-944
31	14-858	14-899	14-924	14-938	14-943	14-940	14-929	14-911	14-887	14-859	14-825
32	14-722	14-763	14-788	14-803	14-809	14-807	14-798	14-872	14-759	14-733	14-701
33	14-581	14-622	14-648	14-664	14-671	14-670	14-662	14-647	14-627	14-602	14-572
34	14-435	14-476	14-502	14-519	14-527	14-527	14-520	14-507	14-488	14-465	14-438
35	14-284	14-325	14-352	14-370	14-378	14-380	14-374	14-362	14-345	14-324	14-298
36	14-130	14-171	14-198	14-216	14-226	14-223	14-223	14-213	14-197	14-178	14-154
37	13-970	14-012	14-039	14-058	14-068	14-071	14-068	14-058	14-044	14-027	14-005
38	13-806	13-847	13-875	13-894	13-905	13-909	13-906	13-898	13-886	13-870	13-849
39	13-636	13-677	13-705	13-724	13-736	13-741	13-739	13-732	13-721	13-707	13-688
40	13-462	13-503	13-531	13-550	13-562	13-568	13-567	13-562	13-552	13-538	13-521
41	13-283	13-323	13-352	13-371	13-384	13-390	13-390	13-385	13-376	13-365	13-349
42	13-098	13-138	13-166	13-186	13-199	13-206	13-207	13-203	13-195	13-185	13-171
43	12-908	12-948	12-975	12-995	13-008	13-015	13-017	13-014	13-008	12-998	12-986
44	12-712	12-751	12-779	12-799	12-812	12-820	12-822	12-820	12-815	12-806	12-795
45	12-511	12-550	12-577	12-597	12-610	12-618	12-621	12-620	12-615	12-608	12-598
46	12-303	12-342	12-369	12-388	12-402	12-410	12-413	12-413	12-409	12-403	12-394
47	12-090	12-127	12-154	12-174	12-187	12-196	12-200	12-200	12-196	12-191	12-183
48	11-870	11-907	11-933	11-953	11-967	11-975	11-979	11-980	11-977	11-972	11-965
49	11-645	11-681	11-707	11-726	11-739	11-748	11-752	11-753	11-751	11-747	11-741
50	11-413	11-449	11-474	11-493	11-507	11-515	11-520	11-521	11-520	11-516	11-511
51	11-177	11-212	11-236	11-255	11-268	11-277	11-282	11-284	11-282	11-280	11-275
52	10-936	10-969	10-994	11-012	11-025	11-034	11-039	11-041	11-040	11-038	11-034
53	10-690	10-723	10-746	10-764	10-777	10-786	10-791	10-793	10-792	10-791	10-787
54	10-440	10-472	10-495	10-512	10-525	10-533	10-539	10-541	10-541	10-539	10-537
55	10-187	10-218	10-240	10-257	10-269	10-278	10-283	10-285	10-286	10-285	10-282
56	9-931	9-960	9-982	9-998	10-010	10-019	10-024	10-026	10-027	10-026	10-024
57	9-670	9-699	9-720	9-736	9-747	9-756	9-761	9-763	9-764	9-764	9-762
58	9-407	9-435	9-455	9-470	9-482	9-490	9-495	9-497	9-498	9-498	9-496
59	9-142	9-170	9-188	9-202	9-213	9-221	9-226	9-229	9-229	9-229	9-228
60	8-874	8-900	8-918	8-933	8-943	8-951	8-955	9-958	8-959	8-959	9-958
61								8-686	8-687	8-687	8-686
62									8-414	8-415	8-414
63										8-143	8-142
64											7-871
65											
66											
67											
68											
69											
70											
71											
72											
73											
74											
75											

in Jahren

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
15-423	15-367	15-305	15-238	15-163	15-082	14-994	14-898	14-793	14-680	14-558
15-327	15-274	15-214	15-149	15-077	14-999	14-913	14-819	14-718	14-607	14-487
15-228	15-175	15-119	15-056	14-987	14-911	14-827	14-737	14-637	14-530	14-413
15-124	15-074	15-019	14-959	14-892	14-819	14-739	14-650	14-554	14-449	14-335
15-016	14-969	14-917	14-858	14-794	14-724	14-646	14-561	14-467	14-365	14-254
14-904	14-859	14-809	14-754	14-691	14-624	14-549	14-467	14-377	14-277	14-169
14-787	14-745	14-697	14-644	14-586	14-519	14-448	14-369	14-281	14-186	14-080
14-666	14-626	14-581	14-530	14-474	14-411	14-341	14-266	14-181	14-089	13-987
14-539	14-501	14-458	14-411	14-357	14-298	14-231	14-157	14-077	13-987	13-889
14-406	14-371	14-331	14-285	14-234	14-178	14-115	14-044	13-965	13-880	13-785
14-269	14-236	14-198	14-155	14-107	14-053	13-993	13-926	13-851	13-767	13-677
14-127	14-096	14-060	14-020	13-975	13-924	13-866	13-802	13-731	13-652	13-563
13-979	13-951	13-917	13-880	13-837	13-789	13-734	13-674	13-606	13-530	13-445
13-826	13-799	13-768	13-733	13-693	13-648	13-596	13-539	13-474	13-402	13-321
13-667	13-642	13-613	13-580	13-543	13-500	13-452	13-397	13-336	13-267	13-190
13-502	13-479	13-452	13-422	13-387	13-347	13-302	13-250	13-192	13-127	13-054
13-331	13-310	13-286	13-257	13-225	13-188	13-145	13-097	13-042	12-981	12-911
13-154	13-135	13-113	11-087	12-057	13-022	12-983	12-937	12-886	12-828	12-762
12-971	12-953	12-933	12-909	12-881	12-849	12-812	12-770	12-722	12-667	12-605
12-782	12-766	12-747	12-725	12-700	12-670	12-636	12-597	12-552	12-500	12-442
12-586	12-571	12-555	12-535	12-511	12-484	12-452	12-416	12-374	12-326	12-271
12-383	12-370	12-355	12-337	12-315	12-290	12-261	12-228	12-189	12-144	12-093
12-173	12-162	12-148	12-132	12-112	12-090	12-063	12-032	11-996	11-954	11-906
11-957	11-947	11-934	11-920	11-902	11-881	11-857	11-829	11-795	11-757	11-712
11-734	11-725	11-714	11-701	11-685	11-666	11-644	11-618	11-587	11-552	11-511
11-504	11-496	11-487	11-475	11-461	11-444	11-424	11-400	11-372	11-340	11-302
11-269	11-262	11-254	11-243	11-231	11-216	11-198	11-176	11-151	11-121	11-086
11-029	11-023	11-015	11-006	10-995	10-981	10-965	10-946	10-922	10-895	10-863
10-783	10-778	10-771	10-763	10-753	10-741	10-726	10-709	10-688	10-663	10-634
10-533	10-528	10-523	10-516	10-507	10-496	10-483	10-467	10-449	10-426	10-399
10-279	10-275	10-270	10-264	10-256	10-247	10-235	10-221	10-205	10-184	10-160
10-021	10-018	10-014	10-008	10-002	9-993	9-983	9-971	9-956	9-937	9-916
9-760	9-757	9-753	9-748	9-743	9-735	9-727	9-716	9-702	9-686	9-666
9-495	9-492	9-489	9-485	9-480	9-474	9-466	9-456	9-444	9-430	9-412
9-227	9-225	9-222	9-219	9-215	9-209	9-202	9-194	9-183	9-170	9-154
8-957	8-955	8-953	8-950	8-947	8-942	8-936	8-929	8-919	8-908	8-894
8-685	8-684	8-682	8-680	8-677	8-673	8-668	8-661	8-653	8-643	8-631
8-413	8-412	8-411	8-409	8-406	8-403	8-398	8-393	8-386	8-377	8-366
8-141	8-141	8-139	8-138	8-136	8-133	8-129	8-124	8-118	8-110	8-101
7-871	7-870	7-869	7-868	7-866	7-863	7-860	7-856	7-851	7-844	7-836
7-601	7-601	7-600	7-599	7-598	7-595	7-593	7-589	7-585	7-579	7-572
	7-334	7-334	7-333	7-331	7-330	7-327	7-325	7-321	7-316	7-309
		7-070	7-069	7-068	7-067	7-065	7-062	7-059	7-055	7-049
			6-809	6-809	6-808	6-806	6-804	6-801	6-797	6-793
				6-554	6-553	6-552	6-550	6-548	6-544	6-540
					6-303	6-302	6-301	6-299	6-296	6-292
						6-058	6-057	6-055	6-053	6-050
							5-818	5-817	5-815	5-812
								5-581	5-582	5-580
									5-355	5-353
										5-130

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
25	14-425	14-283	14-129	13-964	13-789	13-604	13-407	13-200	12-983	12-755	12-517	12-263
26	14-358	14-217	14-066	13-904	13-732	13-549	13-355	13-151	12-936	12-710	12-474	12-229
27	14-286	14-148	14-000	13-841	13-671	13-491	13-300	13-098	12-886	12-663	12-430	12-187
28	14-211	14-076	13-931	13-775	13-608	13-431	13-243	13-044	12-834	12-614	12-383	12-143
29	14-133	14-001	13-859	13-706	13-542	13-368	13-182	12-987	12-780	12-563	12-335	12-097
30	14-051	13-923	13-783	13-634	13-473	13-302	13-120	12-927	12-723	12-509	12-284	12-049
31	13-966	13-840	13-704	13-558	13-401	13-233	13-054	12-864	12-664	12-453	12-231	11-999
32	13-876	13-754	13-621	13-478	13-324	13-160	12-984	12-798	12-601	12-393	12-175	11-946
33	13-781	13-663	13-533	13-394	13-244	13-083	12-911	12-728	12-535	12-330	12-115	11-890
34	13-681	13-566	13-440	13-305	13-158	13-001	12-833	12-654	12-464	12-263	12-052	11-830
35	13-576	13-465	13-344	13-212	13-069	12-916	12-751	12-576	12-390	12-193	11-985	11-768
36	13-467	13-360	13-242	13-114	12-975	12-826	12-666	12-495	12-313	12-120	11-916	11-702
37	13-351	13-249	13-135	13-011	12-877	12-731	12-575	12-409	12-231	12-042	11-842	11-632
38	13-231	13-131	13-022	12-903	12-772	12-632	12-480	12-317	12-144	11-959	11-764	11-558
39	13-105	13-009	12-902	12-788	12-662	12-526	12-379	12-221	12-052	11-872	11-681	11-480
40	12-972	12-881	12-779	12-667	12-547	12-415	12-272	12-120	11-955	11-780	11-594	11-397
41	12-833	12-746	12-649	12-542	12-424	12-298	12-160	12-012	11-853	11-682	11-501	11-309
42	12-688	12-605	12-512	12-410	12-297	12-173	12-042	11-899	11-744	11-580	11-403	11-216
43	12-535	12-456	12-368	12-270	12-162	12-045	11-915	11-779	11-629	11-469	11-299	11-117
44	12-376	12-301	12-217	12-123	12-021	11-908	11-785	11-650	11-508	11-353	11-188	11-013
45	12-209	12-138	12-058	11-970	11-872	11-764	11-646	11-519	11-378	11-231	11-071	10-901
46	12-034	11-967	11-892	11-808	11-715	11-612	11-500	11-377	11-244	11-099	10-947	10-782
47	11-852	11-789	11-718	11-639	11-550	11-453	11-345	11-228	11-101	10-963	10-813	10-656
48	11-661	11-603	11-536	11-461	11-377	11-285	11-183	11-071	10-950	10-818	10-675	10-523
49	11-463	11-408	11-346	11-275	11-196	11-109	11-012	10-906	10-790	10-664	10-528	10-382
50	11-258	11-207	11-148	11-082	11-008	10-925	10-834	10-733	10-623	10-503	10-373	10-233
51	11-045	10-998	10-943	10-881	10-812	10-734	10-648	10-553	10-448	10-334	10-210	10-077
52	10-826	10-782	10-731	10-673	10-608	10-536	10-454	10-365	10-266	10-158	10-040	9-913
53	10-599	10-559	10-512	10-459	10-398	10-330	10-254	10-169	10-076	9-974	9-862	9-742
54	10-368	10-331	10-287	10-238	10-181	10-118	10-047	9-968	9-880	9-784	9-678	9-564
55	10-131	10-097	10-057	10-012	9-959	9-900	9-834	9-760	9-678	9-587	9-488	9-380
56	9-890	9-858	9-822	9-780	9-731	9-677	9-615	9-546	9-469	9-384	9-291	9-189
57	9-642	9-614	9-580	9-542	9-497	9-447	9-389	9-325	9-254	9-174	9-087	8-991
58	9-391	9-365	9-335	9-299	9-258	9-212	9-159	9-099	9-033	8-959	8-877	8-787
59	9-135	9-112	9-084	9-052	9-014	8-972	8-923	8-868	8-806	8-737	8-661	8-577
60	8-877	8-856	8-831	8-801	8-767	8-728	8-683	8-632	8-575	8-511	8-440	8-362
61	8-615	8-596	8-574	8-547	8-516	8-480	8-439	8-392	8-340	8-281	8-215	8-143
62	8-352	8-335	8-315	8-291	8-262	8-230	8-192	8-150	8-101	8-047	7-986	7-919
63	8-088	8-073	8-055	8-033	8-007	7-978	7-944	7-905	7-861	7-811	7-755	7-693
64	7-825	7-812	7-795	7-775	7-752	7-725	7-694	7-659	7-619	7-573	7-521	7-461
65	7-562	7-550	7-536	7-518	7-497	7-473	7-445	7-413	7-376	7-334	7-287	7-234
66	7-301	7-290	7-277	7-262	7-243	7-221	7-196	7-167	7-133	7-095	7-052	7-004
67	7-042	7-033	7-021	7-007	6-990	6-971	6-948	6-921	6-891	6-857	6-817	6-773
68	6-786	6-778	6-768	6-755	6-740	6-723	6-702	6-679	6-651	6-620	6-584	6-544
69	6-535	6-528	6-519	6-508	6-494	6-479	6-460	6-439	6-414	6-386	6-353	6-317
70	6-288	6-282	6-273	6-264	6-252	6-238	6-221	6-202	6-180	6-154	6-125	6-092
71	6-046	6-040	6-033	6-025	6-014	6-002	5-987	5-970	5-950	5-927	5-901	5-871
72	5-809	5-804	5-798	5-790	5-781	5-770	5-757	5-742	5-724	5-703	5-679	5-652
73	5-577	5-573	5-567	5-561	5-553	5-543	5-531	5-518	5-502	5-483	5-462	5-438
74	5-350	5-347	5-342	5-336	5-329	5-321	5-310	5-298	5-284	5-268	5-249	5-227

in Jahren

52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
12-013	11-749	11-477	11-200	10-916	10-628	10-337	10-042	9-745	9-446			
11-975	11-713	11-444	11-168	10-887	10-601	10-311	10-018	9-723	9-426	9-128		
11-935	11-676	11-409	11-135	10-856	10-572	10-284	9-993	9-699	9-404	9-108	8-813	
11-894	11-637	11-372	11-101	10-824	10-542	10-256	9-967	9-675	9-381	9-087	8-793	8-501
11-851	11-596	11-334	11-065	10-791	10-511	10-227	9-939	9-650	9-358	9-065	8-773	8-483
11-806	11-554	11-294	11-028	10-756	10-478	10-197	9-911	9-623	9-333	9-043	8-752	8-463
11-758	11-509	11-252	10-989	10-719	10-444	10-165	9-882	9-596	9-308	9-019	8-730	8-443
11-708	11-462	11-208	10-948	10-681	10-408	10-131	9-850	9-567	9-281	8-994	8-707	8-422
11-655	11-413	11-162	10-904	10-640	10-370	10-096	9-817	9-536	9-253	8-968	8-683	8-400
11-599	11-360	11-112	10-857	10-596	10-329	10-058	9-782	9-503	9-222	8-939	8-657	8-376
11-540	11-304	11-060	10-809	10-550	10-287	10-018	9-745	9-469	9-190	8-910	8-630	8-350
11-478	11-246	11-005	10-757	10-503	10-242	9-976	9-706	9-433	9-157	8-879	8-601	8-324
11-412	11-184	10-947	10-703	10-452	10-195	9-932	9-665	9-395	9-122	8-847	8-571	8-297
11-343	11-118	10-886	10-645	10-398	10-144	9-885	9-622	9-355	9-084	8-812	8-539	8-267
11-269	11-049	10-820	10-584	10-340	10-090	9-835	9-575	9-312	9-044	8-775	8-505	8-235
11-190	10-975	10-751	10-519	10-279	10-034	9-782	9-526	9-266	9-002	8-736	8-469	8-202
11-108	10-897	10-677	10-450	10-215	9-973	9-726	9-474	9-217	8-957	8-694	8-431	8-167
11-020	10-814	10-599	10-376	10-146	9-909	9-666	9-418	9-165	8-909	8-650	8-390	8-129
10-926	10-725	10-515	10-298	10-072	9-840	9-602	9-358	9-110	8-857	8-602	8-346	8-088
10-826	10-631	10-426	10-214	9-994	9-766	9-533	9-294	9-050	8-802	8-551	8-298	8-045
10-721	10-531	10-332	10-125	9-910	9-688	9-459	9-225	8-986	8-743	8-496	8-248	7-998
10-607	10-424	10-231	10-029	9-820	9-603	9-380	9-151	8-918	8-679	8-437	8-193	7-947
10-488	10-310	10-123	9-928	9-724	9-513	9-296	9-072	8-844	8-610	8-373	8-133	7-892
10-360	10-189	10-008	9-819	9-621	9-416	9-205	8-987	8-764	8-536	8-304	8-069	7-833
10-225	10-060	9-886	9-703	9-512	9-313	9-108	8-896	8-679	8-456	8-230	8-000	7-769
10-083	9-924	9-756	9-580	9-395	9-203	9-004	8-799	8-587	8-371	8-150	7-926	7-700
9-933	9-781	9-620	9-450	9-272	9-087	8-894	8-695	8-490	8-280	8-065	7-847	7-627
9-776	9-630	9-476	9-313	9-142	8-963	8-777	8-585	8-387	8-183	7-974	7-762	7-548
9-611	9-472	9-325	9-169	9-005	8-833	8-654	8-469	8-277	8-080	7-878	7-672	7-464
9-440	9-308	9-167	9-018	8-861	8-697	8-525	8-346	8-162	7-971	7-776	7-577	7-374
9-262	9-137	9-003	8-861	8-711	8-554	8-389	8-218	8-040	7-857	7-668	7-476	7-280
9-078	8-959	8-832	8-698	8-555	8-405	8-247	8-083	7-913	7-736	7-555	7-369	7-180
8-887	8-775	8-655	8-527	8-391	8-248	8-098	7-942	7-779	7-610	7-435	7-257	7-075
8-689	8-584	8-470	8-350	8-221	8-086	7-943	7-794	7-638	7-476	7-309	7-138	6-963
8-486	8-387	8-280	8-166	8-045	7-917	7-781	7-639	7-491	7-337	7-178	7-014	6-846
8-277	8-184	8-084	7-977	7-863	7-742	7-614	7-479	7-339	7-192	7-040	6-884	6-723
8-063	7-976	7-883	7-783	7-675	7-561	7-441	7-314	7-181	7-041	6-897	6-748	6-595
7-845	7-765	7-677	7-584	7-483	7-376	7-263	7-143	7-017	6-886	6-748	6-607	6-461
7-624	7-549	7-468	7-381	7-287	7-187	7-080	6-968	6-850	6-725	6-596	6-462	6-323
7-401	7-332	7-256	7-175	6-088	6-994	6-895	6-789	6-678	6-561	6-439	6-312	6-181
7-176	7-112	7-043	6-967	6-886	6-799	6-706	6-607	6-503	6-394	6-279	6-159	6-036
6-950	6-891	6-827	6-757	6-682	6-601	6-515	6-423	6-326	6-223	6-115	6-003	5-887
6-724	6-670	6-611	6-547	6-477	6-402	6-322	6-237	6-146	6-050	5-949	5-844	5-735
6-499	6-450	6-395	6-336	6-272	6-203	6-129	6-050	5-966	5-876	5-782	5-684	5-581
6-276	6-231	6-181	6-127	6-068	6-004	5-936	5-863	5-785	5-702	5-614	5-522	5-427
6-055	6-014	5-969	5-919	5-865	5-806	5-743	5-676	5-604	5-527	5-445	5-360	5-271
5-837	5-800	5-758	5-713	5-664	5-610	5-552	5-490	5-424	5-353	5-277	5-198	5-115
5-622	5-588	5-551	5-510	5-465	5-416	5-363	5-306	5-245	5-179	5-110	5-037	4-960
5-411	5-380	5-346	5-309	5-268	5-223	5-175	5-123	5-067	5-007	4-943	4-875	4-804
5-202	5-175	5-144	5-111	5-074	5-033	4-989	4-942	4-891	4-836	4-777	4-715	4-650

(Fortsetzung zu Seite 110 und 111.)

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
75	5-128	5-125	5-121	5-116	5-110	5-102	5-093	5-083	5-070	5-056	5-039	5-019
76	4-910	4-907	4-904	4-899	4-894	4-887	4-880	4-870	5-859	4-846	4-831	4-814
77		4-693	4-690	4-686	4-681	4-676	4-669	4-661	4-651	4-640	4-627	4-611
78			4-479	4-476	4-471	4-467	4-461	4-454	4-445	4-435	4-424	4-410
79				4-266	4-262	4-258	4-253	4-247	4-240	4-231	4-221	4-209
80					4-052	4-049	4-044	4-039	4-033	4-026	4-017	4-007
81						3-836	3-833	3-828	3-823	3-817	3-809	3-801
82							3-614	3-610	3-606	3-600	3-594	3-587
83								3-380	3-376	3-372	3-367	3-361
84									3-127	3-124	3-120	3-115
85										2-844	2-841	2-837
86											2-503	2-500
87												2-302
88												
89												
90												
91												
92												
93												
94												

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
29	8-195											
30	8-177	7-893										
31	8-158	7-876	7-598									
32	8-139	7-858	7-581	7-309								
33	8-118	7-839	7-564	7-293	7-027							
34	8-096	7-819	7-545	7-276	7-011	6-751						
35	8-073	7-798	7-525	7-258	6-994	6-736	6-485					
36	8-049	7-775	7-505	7-239	6-977	6-721	6-470	6-226				
37	8-023	7-752	7-484	7-219	6-959	6-704	6-455	6-212	5-975			
38	7-996	7-727	7-461	7-198	6-940	6-687	6-439	6-197	5-962	5-732		
39	7-967	7-700	7-436	7-176	6-919	6-668	6-422	6-182	5-947	5-719	5-498	
40	7-936	7-672	7-410	7-152	6-898	6-648	6-404	6-165	5-932	5-706	5-485	5-272
41	7-904	7-642	7-383	7-127	6-875	6-627	6-385	6-148	5-917	5-691	5-472	5-260
42	7-869	7-611	7-354	7-100	6-850	6-605	6-365	6-129	5-900	5-676	5-458	5-247
43	7-832	7-476	7-322	7-071	6-824	6-581	6-342	6-109	5-881	5-659	5-443	5-233
44	7-791	7-539	7-288	7-040	6-795	6-555	6-319	6-088	5-862	5-641	5-427	5-219
45	7-748	7-500	7-252	7-007	6-765	6-527	6-293	6-064	5-841	5-622	5-410	5-203
46	7-702	7-456	7-212	6-971	6-732	6-496	6-266	6-039	5-818	5-601	5-391	5-186
47	7-651	7-410	7-170	6-931	6-696	6-464	6-236	6-012	5-793	5-578	5-370	5-167
48	7-596	7-359	7-123	6-889	6-657	6-428	6-203	5-982	5-765	5-553	5-347	5-140
49	7-537	7-305	7-073	6-842	6-614	6-388	6-167	5-949	5-735	5-526	5-322	5-124

in Jahren

[illegible]

in Jahren

77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
5·054												
5·042	4·843											
5·030	4·832	4·640										
5·016	4·820	4·629	4·444									
5·002	4·807	4·618	4·434	4·254								
4·986	4·793	4·605	4·422	4·244	4·071							
4·969	4·778	4·591	4·410	4·233	4·060	3·892						
4·951	4·761	4·576	4·396	4·220	4·049	3·882	3·719					
4·930	4·742	4·559	4·380	4·206	4·037	3·871	3·709	3·551				

Bruderladen,

8

(Fortsetzung zu Seite 112 und 113.)

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
50	7-473	7-246	7-018	6-792	6-568	6-346	6-128	5-913	5-703	5-497	5-295	5-099
51	7-405	7-182	6-960	6-738	6-518	6-300	6-086	5-875	5-667	5-464	5-266	5-072
52	7-331	7-114	6-897	6-680	6-464	6-251	6-041	5-833	5-629	5-429	5-234	5-043
53	7-253	7-041	6-829	6-618	6-407	6-198	5-992	5-788	5-588	5-392	5-200	5-012
54	7-170	6-964	6-757	6-551	6-345	6-141	5-940	5-740	5-544	5-351	5-163	4-978
55	7-082	6-882	6-681	6-481	6-280	6-081	5-884	5-689	5-497	5-308	5-123	4-942
56	6-989	6-795	6-600	6-405	6-210	6-016	5-825	5-634	5-447	5-262	5-081	4-903
57	6-890	6-703	6-514	6-325	6-136	5-947	5-761	5-575	5-392	5-212	5-035	4-861
58	6-785	6-605	6-423	6-240	6-057	5-874	5-693	5-512	5-334	5-159	4-986	4-816
59	6-675	6-502	6-326	6-150	5-973	5-796	5-620	5-445	5-272	5-101	4-933	4-767
60	6-559	6-393	6-224	6-055	5-884	5-713	5-543	5-374	5-206	5-040	4-877	4-715
61	6-438	6-279	6-117	5-954	5-790	5-626	5-462	5-298	5-136	4-975	4-816	4-660
62	6-312	6-160	6-005	5-849	5-692	5-534	5-376	5-218	5-062	4-906	4-753	4-601
63	6-181	6-037	5-889	5-740	5-589	5-437	5-286	5-134	4-984	4-834	4-685	4-539
64	6-047	5-909	5-769	5-626	5-482	5-337	5-192	5-047	4-902	4-758	4-615	4-473
65	5-908	5-778	5-645	5-509	5-372	5-234	5-095	4-956	4-817	4-678	4-541	4-404
66	5-767	5-643	5-517	5-389	5-258	5-126	4-994	4-861	4-728	4-596	4-464	4-333
67	5-622	5-506	5-386	5-265	5-141	5-016	4-890	4-764	4-637	4-510	4-384	4-258
68	5-475	5-366	5-254	5-139	5-022	4-903	4-784	4-664	4-543	4-422	4-301	4-181
69	5-327	5-225	5-119	5-011	4-901	4-789	4-676	4-561	4-447	4-331	4-217	4-102
70	5-178	5-082	4-983	4-882	4-778	4-672	4-566	4-457	4-349	4-239	4-130	4-021
71	5-029	4-939	4-847	4-752	4-654	4-555	4-454	4-352	4-249	4-146	4-042	3-938
72	4-879	4-796	4-710	4-621	4-530	4-436	4-342	4-246	4-149	4-051	3-952	3-854
73	4-730	4-653	4-572	4-490	4-404	4-317	4-229	4-138	4-047	3-955	3-862	3-769
74	4-581	4-509	4-435	4-358	4-279	4-197	4-115	4-030	3-944	3-858	3-770	3-682
75	4-432	4-366	4-297	4-226	4-152	4-077	4-000	3-921	3-841	3-759	3-677	3-595
76	4-282	4-222	4-159	4-093	4-025	3-955	3-884	3-810	3-736	3-660	3-583	3-505
77	4-132	4-077	4-019	3-959	3-897	3-832	3-766	3-698	3-629	3-559	3-487	3-415
78	3-982	3-932	3-879	3-824	3-767	3-708	3-647	3-585	3-521	3-456	3-390	3-322
79	3-828	3-783	3-736	3-686	3-634	3-581	3-525	3-468	3-410	3-350	3-289	3-227
80	3-672	3-631	3-589	3-544	3-498	3-449	3-399	3-348	3-294	3-240	3-184	3-128
81	3-509	3-473	3-436	3-396	3-355	3-312	3-267	3-221	3-173	3-124	3-074	3-023
82	3-337	3-307	3-273	3-239	3-203	3-165	3-126	3-085	3-043	2-999	2-954	2-909
83	3-151	3-125	3-097	3-067	3-036	3-004	2-970	2-935	2-898	2-860	2-821	2-781
84	2-943	2-921	2-898	2-874	2-848	2-820	2-792	2-762	2-732	2-700	2-667	2-633
85	2-702	2-684	2-666	2-646	2-626	2-603	2-580	2-556	2-531	2-505	2-478	2-451
86	2-398	2-386	2-371	2-356	2-340	2-325	2-305	2-287	2-268	2-247	2-227	2-205
87	2-221	2-210	2-200	2-187	2-174	2-160	2-149	2-131	2-115	2-099	2-082	2-064
88	2-033	2-024	2-015	2-008	1-996	1-985	1-974	1-962	1-950	1-937	1-923	1-909
89	1-863	1-857	1-850	1-843	1-839	1-827	1-818	1-809	1-799	1-789	1-778	1-767
90	1-728	1-723	1-717	1-712	1-706	1-699	1-692	1-685	1-677	1-669	1-661	1-652
91	1-592	1-588	1-584	1-580	1-576	1-571	1-566	1-561	1-554	1-549	1-543	1-536
92	1-445	1-442	1-440	1-437	1-434	1-431	1-427	1-424	1-420	1-415	1-411	1-407
93	1-306	1-305	1-303	1-302	1-300	1-298	1-296	1-294	1-292	1-290	1-288	1-285
94	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000	1-000

in Jahren

77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
4·908	4·722	4·540	4·364	4·191	4·023	3·859	3·698	3·541	3·385			
4·883	4·699	4·520	4·346	4·175	4·008	3·846	3·686	3·530	3·376	3·247		
4·857	4·675	4·499	4·326	4·157	3·992	3·831	3·673	3·519	3·365	3·237	3·108	
4·828	4·649	4·475	4·304	4·138	3·975	3·815	3·659	3·506	3·354	3·227	3·099	2·966
4·798	4·621	4·449	4·281	4·117	3·956	3·798	3·644	3·492	3·342	3·216	3·089	2·957
4·765	4·591	4·422	4·256	4·094	3·935	3·780	3·627	3·477	3·328	3·204	3·078	2·948
4·729	4·559	4·393	4·230	4·070	3·913	3·760	3·609	3·461	3·314	3·191	3·067	2·938
4·691	4·524	4·360	4·200	4·043	3·889	3·738	3·590	3·444	3·298	3·177	3·055	2·927
4·649	4·486	4·326	4·169	4·015	3·863	3·715	3·569	3·425	3·281	3·162	3·041	2·915
4·605	4·445	4·289	4·135	3·984	3·835	3·689	3·545	3·404	3·263	3·145	3·026	2·902
4·557	4·401	4·249	4·098	3·950	3·805	3·662	3·521	3·381	3·243	3·127	3·010	2·887
4·506	4·354	4·205	4·059	3·914	3·772	3·632	3·494	3·357	3·220	3·107	2·992	2·872
4·451	4·304	4·159	4·017	3·876	3·737	3·600	3·465	3·331	3·197	3·086	2·973	2·855
4·394	4·251	4·111	3·972	3·835	3·699	3·566	3·434	3·303	3·172	3·063	2·952	2·836
4·333	4·195	4·059	3·924	3·791	3·660	3·530	3·401	3·273	3·145	3·038	2·930	2·817
4·270	4·136	4·005	3·874	3·745	3·617	3·491	3·365	3·241	3·116	3·012	2·906	2·796
4·203	4·074	3·947	3·821	3·697	3·573	3·450	3·328	3·207	3·085	2·984	2·881	2·773
4·134	4·010	3·888	3·766	3·646	3·526	3·407	3·289	3·171	3·052	2·954	2·854	2·749
4·062	3·943	3·825	3·709	3·592	3·477	3·362	3·248	3·133	3·018	2·923	2·826	2·723
3·988	3·874	3·761	3·649	3·537	3·426	3·315	3·205	3·094	2·982	2·890	2·796	2·696
3·912	3·803	3·695	3·588	3·480	3·373	3·267	3·160	3·053	2·945	2·856	2·765	2·668
3·834	3·731	3·628	3·525	3·422	3·319	3·217	3·114	3·011	2·906	2·821	2·732	2·639
3·755	3·657	3·559	3·461	3·362	3·264	3·165	3·067	2·967	2·866	2·783	2·699	2·609
3·675	3·582	3·488	3·395	3·301	3·207	3·113	3·018	2·922	2·825	2·746	2·664	2·578
3·594	3·506	3·417	3·328	3·239	3·149	3·059	2·968	2·877	2·783	2·707	2·628	2·545
3·512	3·428	3·344	3·260	3·175	3·090	3·004	2·917	2·830	2·740	2·667	2·592	2·512
3·427	3·349	3·270	3·190	3·110	3·029	2·947	2·865	2·781	2·695	2·625	2·554	2·477
3·342	3·268	3·194	3·119	3·043	2·967	2·889	2·811	2·731	2·649	2·583	2·514	2·441
3·254	3·186	3·116	3·046	2·975	2·903	2·830	2·756	2·680	2·602	2·539	2·474	2·405
3·164	3·101	3·036	2·971	2·904	2·837	2·768	2·699	2·627	2·553	2·494	2·432	2·366
3·070	3·012	2·952	2·892	2·830	2·768	2·704	2·638	2·571	2·501	2·446	2·388	2·326
2·970	2·917	2·863	2·808	2·751	2·694	2·635	2·574	2·512	2·446	2·395	2·341	2·283
2·862	2·814	2·766	2·716	2·665	2·612	2·559	2·503	2·446	2·385	2·338	2·289	2·236
2·740	2·698	2·655	2·612	2·566	2·520	2·472	2·422	2·370	2·315	2·272	2·228	2·180
2·598	2·562	2·525	2·487	2·448	2·408	2·366	2·323	2·277	2·228	2·191	2·152	2·110
2·422	2·392	2·362	2·331	2·298	2·265	2·230	2·194	2·155	2·113	2·081	2·049	2·013
2·183	2·160	2·136	2·112	2·086	2·060	2·032	2·004	1·973	1·939	1·913	1·887	1·859
2·045	2·028	2·007	1·987	1·966	1·944	1·921	1·897	1·871	1·842	1·820	1·798	1·775
1·894	1·879	1·866	1·847	1·831	1·813	1·795	1·775	1·754	1·730	1·712	1·694	1·675
1·755	1·743	1·731	1·723	1·705	1·691	1·676	1·660	1·643	1·623	1·609	1·595	1·580
1·643	1·634	1·624	1·614	1·603	1·592	1·580	1·568	1·554	1·538	1·526	1·515	1·502
1·529	1·522	1·515	1·507	1·499	1·490	1·481	1·472	1·461	1·448	1·440	1·431	1·421
1·402	1·397	1·392	1·387	1·381	1·376	1·369	1·363	1·356	1·346	1·340	1·334	1·327
1·282	1·280	1·277	1·274	1·270	1·267	1·263	1·260	1·256	1·250	1·246	1·242	1·238
1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000

8*

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau in Jahren									
	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
54	2·811									
55	2·803	2·659								
56	2·795	2·652	2·499							
57	2·785	2·644	2·492	2·340						
58	2·775	2·635	2·484	2·334	2·108					
59	2·763	2·625	2·476	2·327	2·103	1·922				
60	2·751	2·615	2·467	2·320	2·098	1·917	1·744			
61	2·737	2·603	2·457	2·312	2·092	1·913	1·740	1·604		
62	2·722	2·590	2·447	2·303	2·085	1·908	1·737	1·602	1·307	
63	2·706	2·576	2·435	2·294	2·078	1·902	1·733	1·599	1·306	1·000
64	2·689	2·562	2·423	2·284	2·070	1·896	1·729	1·596	1·305	1·000
65	2·671	2·546	2·409	2·273	2·062	1·890	1·724	1·593	1·304	1·000
66	2·651	2·528	2·395	2·261	2·052	1·883	1·719	1·590	1·302	1·000
67	2·630	2·510	2·379	2·248	2·043	1·876	1·713	1·586	1·301	1·000
68	2·607	2·490	2·362	2·234	2·032	1·867	1·708	1·582	1·299	1·000
69	2·583	2·470	2·345	2·219	2·021	1·859	1·701	1·578	1·297	1·000
70	2·559	2·448	2·326	2·204	2·009	1·850	1·695	1·573	1·295	1·000
71	2·533	2·425	2·307	2·188	1·996	1·840	1·687	1·568	1·293	1·000
72	2·506	2·402	2·286	2·171	1·983	1·830	1·680	1·563	1·291	1·000
73	2·478	2·377	2·265	2·152	1·969	1·819	1·672	1·557	1·289	1·000
74	2·450	2·351	2·243	2·134	1·954	1·808	1·664	1·551	1·286	1·000
75	2·419	2·327	2·220	2·115	1·940	1·796	1·655	1·545	1·284	1·000
76	2·388	2·298	2·199	2·095	1·924	1·784	1·646	1·539	1·281	1·000
77	2·356	2·269	2·172	2·074	1·908	1·771	1·636	1·532	1·278	1·000
78	2·323	2·240	2·146	2·052	1·891	1·758	1·626	1·525	1·275	1·000
79	2·289	2·209	2·120	2·030	1·873	1·744	1·616	1·517	1·272	1·000
80	2·253	2·178	2·092	2·006	1·855	1·729	1·605	1·509	1·269	1·000
81	2·214	2·144	2·063	1·982	1·835	1·714	1·593	1·501	1·265	1·000
82	2·172	2·106	2·031	1·955	1·814	1·698	1·581	1·492	1·261	1·000
83	2·122	2·062	1·993	1·923	1·790	1·680	1·568	1·483	1·257	1·000
84	2·058	2·006	1·944	1·883	1·759	1·656	1·552	1·473	1·253	1·000
85	1·969	1·924	1·872	1·821	1·710	1·619	1·523	1·456	1·249	1·000
86	1·824	1·788	1·745	1·705	1·613	1·536	1·456	1·401	1·221	1·000
87	1·744	1·714	1·678	1·644	1·563	1·495	1·424	1·377	1·211	1·000
88	1·650	1·625	1·596	1·569	1·497	1·442	1·380	1·342	1·194	1·000
89	1·559	1·538	1·515	1·495	1·436	1·379	1·334	1·304	1·175	1·000
90	1·486	1·469	1·447	1·434	1·384	1·343	1·298	1·274	1·160	1·000
91	1·408	1·395	1·380	1·363	1·329	1·295	1·257	1·241	1·143	1·000
92	1·318	1·308	1·298	1·291	1·239	1·235	1·207	1·198	1·119	1·000
93	1·233	1·227	1·219	1·218	1·198	1·182	1·160	1·160	1·107	1·000
94	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000

Werte der unmittelbaren Verbindungsrenten von jährlich 1, zahlbar auf die Dauer der Aktivität des Mannes, und wenn die Frau solange lebt.

(Pränumerando.)

Alter des Mannes in Jahren	Der Mann (Active) um					Mann (Activer) und Frau gleich- alt
	25	20	15	10	5	
	Jahre „jünger“ als die Frau					
18	14-0879	14-8032	15-2757	15-5695	15-7197	15-6512
19	13-8554	14-6096	15-1097	15-4208	15-5906	15-5721
20	13-6126	14-4055	14-9348	15-2641	15-4500	15-4707
21	13-3594	14-1906	14-7509	15-0996	15-2993	15-3525
22	13-0974	13-9656	14-5588	14-9278	15-1410	15-2204
23	12-8255	13-7307	14-3574	14-7482	14-9739	15-0748
24	12-5447	13-4858	14-1468	14-5606	14-7997	14-9170
25	12-2549	13-2311	13-9260	14-3643	14-6176	14-7478
26	11-9570	12-9665	13-6949	14-1593	14-4278	14-5685
27	11-6525	12-6937	13-4542	13-9463	14-2308	14-3815
28	11-3446	12-4143	13-2069	13-7274	14-0291	14-1888
29	11-0337	12-1290	12-9529	13-5024	13-8224	13-9919
30	10-7209	11-8382	12-6929	13-2711	13-6107	13-7906
31	10-4061	11-5420	12-4258	13-0323	13-3930	13-5841
32	10-0889	11-2396	12-1508	12-7842	13-1675	13-3704
33	9-7711	10-9332	11-8687	12-5289	12-9351	13-1508
34	9-4529	10-6228	11-5796	12-2656	12-6951	12-9245
35	9-1364	10-3105	11-2852	11-9964	12-4488	12-6929
36	8-8208	9-9959	10-9851	11-7197	12-1944	12-4544
37	8-5070	9-6794	10-6795	11-4360	11-9316	12-2087
38	8-1956	9-3611	10-3687	11-1439	11-6601	11-9544
39	7-8865	9-0406	10-0519	10-8428	11-3785	11-6902
40	7-5806	8-7196	9-7309	10-5340	11-0883	11-4168
41	2-2790	8-3980	9-4062	10-2182	10-7893	11-1338
42	6-9819	8-0774	9-0791	9-8965	10-4828	10-8419
43	6-6911	7-7599	8-7511	9-5709	10-1695	10-5429
44	6-4076	7-4473	8-4244	9-2435	9-8521	10-2387
45	6-1317	7-1397	8-0996	8-9150	9-5305	9-9297
46	5-8645	6-8385	7-7773	8-5866	9-2063	9-6167
47	5-6050	6-5435	7-4582	8-2586	8-8797	9-3001
48	5-3529	7-2545	7-1425	7-9307	8-5506	8-9785
49	5-1086	5-9722	6-8312	7-6042	8-2205	8-6537

(Fortsetzung zu Seite 117.)

Alter des Mannes in Jahren	Der Mann (Active) um					Mann (Activer) und Frau gleich- alt
	25	20	15	10	5	
	Jahre „jünger“ als die Frau					
50	4·8728	5·6979	6·5261	7·2813	7·8916	8·3273
51	4·6448	5·4318	6·2275	6·9617	7·5642	8·0013
52	4·4263	5·1752	5·9374	6·6490	7·2418	7·6778
53	4·2163	4·9283	5·6568	6·3440	6·9250	7·3583
54	4·0176	4·6942	5·3892	6·0515	6·6192	7·0484
55	3·8280	4·4713	5·1331	5·7695	6·3225	6·7464
56	3·6496	4·2621	4·8923	5·5024	6·0392	6·4570
57	3·4804	4·0646	4·6634	5·2471	5·7663	6·1769
58	3·3203	3·8784	4·4470	5·0040	5·5048	5·9067
59	3·1662	3·6999	4·2387	4·7684	5·2493	5·6409
60	3·0178	3·5288	4·0389	4·5407	5·0005	5·3801
61	2·8678	3·3575	3·8387	4·3118	4·7483	5·1131
62	2·7401	3·1914	3·6452	4·0893	4·5017	4·8505
63	2·6130	3·0292	3·4567	3·8723	4·2603	4·5920
64	2·4846	2·8714	3·2748	3·6627	4·0265	4·3406
65	2·3515	2·7218	3·1040	3·4667	3·8071	4·1041
66	2·2302	2·5847	2·9504	3·2910	3·6105	3·8913
67	2·1044	2·4677	2·8027	3·1228	3·4217	3·6861
68	1·9879	2·3581	2·6663	2·9682	3·2479	3·4967
69	1·8185	2·2545	2·5410	2·8273	3·0891	3·3228
70	1·6830	2·1470	2·4216	2·6941	2·9387	3·1571
71	1·5546	2·0455	2·3063	2·5674	2·7955	2·9986
72	1·4671	1·9516	2·2197	2·4578	2·6706	2·8584
73	1·2472	1·8565	2·1240	2·3368	2·5317	2·7014
74	1·0000	1·6966	2·0079	2·1938	2·3678	2·5161
75		1·5926	1·9178	2·0858	2·2421	2·3712
76		1·4533	1·7636	1·8979	2·0282	2·1302
77		1·3577	1·6139	1·7275	1·8256	1·9035
78		1·1761	1·4747	1·5600	1·6295	1·6859
79		1·0000	1·3201	1·4044	1·4504	1·4886
80			1·1944	1·2560	1·2843	1·3073
81			1·0824	1·1168	1·1283	1·1390
82			1·0000	1·0000	1·0000	1·0000

Werte der unmittelbaren Verbindungsrenten von jährlich 1, zahlbar auf die Dauer der Activität des Mannes, und wenn die Frau solange lebt.

(Pränumerando.)

Alter des Mannes in Jahren	Der Mann (Active) um				
	5	10	15	20	25
	Jahre „älter“ als die Frau				
23	14·9813				
24	14·8695				
25	14·7358				
26	14·5855				
27	14·4214				
28	14·2471	14·1392			
29	14·0636	13·9976			
30	13·8723	13·8383			
31	13·6755	13·6652			
32	13·4669	13·4785			
33	13·2534	13·2805	13·1679		
34	13·0338	13·0717	12·9970		
35	12·8092	12·8548	12·8086		
36	12·5784	12·6294	12·6059		
37	12·3408	12·3966	12·3903		
38	12·0954	12·1548	12·1617	12·0535	
39	11·8406	11·9041	11·9198	11·8453	
40	11·5774	11·6452	11·6667	11·6173	
41	11·3055	11·3780	11·4032	11·3736	
42	11·0256	11·1031	11·1313	11·1165	
43	10·7386	10·8216	10·8518	10·8481	10·7512
44	10·4465	10·5355	10·5680	10·5714	10·5038
45	10·1490	10·2446	10·2795	10·2873	10·2413
46	9·3468	9·9498	9·9874	9·9977	9·9685
47	9·5398	9·6508	9·6913	9·7035	9·6867
48	9·2275	9·3465	9·3902	9·4034	9·3958
49	8·9112	9·0382	9·0855	9·0998	9·0979
50	8·5932	8·7277	8·7790	8·7946	8·7961
51	8·2735	8·4149	8·4708	8·4878	8·4910
52	7·9559	8·1032	8·1643	8·1829	8·1873
53	7·6407	7·7938	7·8600	7·8804	7·8852
54	7·3339	7·4923	7·5638	7·5863	7·5916

(Fortsetzung zu Seite 119.)

Alter des Mannes in Jahren	Der Mann (Active) um				
	5	10	15	20	25
	Jahre „älter“ als die Frau				
55	7·0333	7·1969	7·2732	7·2981	7·3040
56	6·7442	6·9124	6·9933	7·0210	7·0277
57	6·4632	6·6355	6·7201	6·7512	6·7586
58	6·1908	6·3660	6·4545	6·4888	6·4972
59	5·9215	6·0983	6·1901	6·2278	6·2373
60	5·6558	5·8329	5·9277	5·9684	5·9793
61	5·3823	5·5581	5·6551	5·6983	5·7108
62	5·1121	5·2854	5·3841	5·4292	5·4436
63	4·8448	5·0145	5·1139	5·1608	5·1770
64	4·5836	4·7490	4·8484	4·8966	4·9147
65	4·3371	4·4980	4·5966	4·6462	4·6659
66	5·1144	4·2710	4·3686	4·4195	4·4406
67	3·8987	4·0504	4·1464	4·1984	4·2204
68	3·6989	3·8455	3·9394	3·9919	4·0150
69	3·5147	3·6557	3·7472	3·7998	3·8237
70	3·3380	3·4727	3·5612	3·6132	3·6378
71	3·1676	3·2950	3·3798	3·4306	3·4555
72	3·0154	3·1348	3·2156	3·2645	3·2897
73	2·8435	2·9524	3·0272	3·0729	3·0972
74	2·6404	2·7362	2·8027	2·8439	2·8664
75	2·4788	2·5623	2·6210	2·6575	2·6781
76	2·2149	2·2807	2·3272	2·3566	2·3735
77	1·9675	2·0173	2·0529	2·0756	2·0888
78	1·7317	1·7673	1·7929	1·8095	1·8193
79	1·5191	1·5428	1·5600	1·5713	1·5780
80	1·3251	1·3389	1·3490	1·3558	1·3598
81	1·1466	1·1524	1·1567	1·1596	1·1614
82	1·0000	1·0000	1·0000	1·0000	1·0000

Werte

der

**Ansprüche auf die Witwen-Rente (-Provision, -Pension)
von jährlich 1.**

(Einmalige Prämie.)

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau										
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
25	2·977	2·939	2·895	2·848	2·798	2·744	2·689	2·632	2·573	2·513	2·453
26	3·090	3·050	3·006	2·958	2·906	2·851	2·795	2·736	2·674	2·613	2·550
27	3·207	3·166	3·121	3·072	3·019	2·962	2·904	2·844	2·781	2·717	2·652
28	3·327	3·286	3·240	3·190	3·135	3·077	3·018	2·956	2·891	2·825	2·758
29	3·451	3·409	3·363	3·311	3·256	3·196	3·136	3·072	3·005	2·937	2·868
30	3·579	3·537	3·489	3·437	3·380	3·320	3·257	3·192	3·123	3·053	2·982
31	3·711	3·668	3·620	3·567	3·509	3·447	3·383	3·316	3·246	3·174	3·101
32	3·847	3·804	3·756	3·702	3·643	3·580	3·514	3·445	3·374	3·300	3·225
33	3·988	3·945	3·896	3·841	3·781	3·717	3·650	3·580	3·506	3·431	3·354
34	4·134	4·091	4·042	3·986	3·925	3·860	3·792	3·720	3·645	3·568	3·488
35	4·285	4·242	4·192	4·135	4·074	4·007	3·938	3·865	3·788	3·709	3·628
36	4·439	4·396	4·346	4·289	4·226	4·159	4·089	4·014	3·936	3·855	3·772
37	4·599	4·555	4·505	4·447	4·384	4·316	4·244	4·169	4·089	4·006	3·921
38	4·763	4·720	4·669	4·611	4·547	4·478	4·406	4·329	4·247	4·163	4·077
39	4·933	4·890	4·839	4·781	4·716	4·646	4·573	4·495	4·412	4·326	4·238
40	5·107	5·064	5·013	4·955	4·890	4·819	4·745	4·665	4·581	4·495	4·406
41	5·286	5·244	5·192	5·134	5·068	4·997	4·922	4·842	4·757	4·668	4·577
42	5·471	5·429	5·378	5·319	5·253	5·181	5·105	5·024	4·938	4·848	4·755
43	5·661	5·619	5·569	5·510	5·444	5·372	5·295	5·213	5·125	5·035	4·940
44	5·857	5·816	5·765	5·706	5·640	5·567	5·490	5·407	5·318	5·227	5·131
45	6·058	6·017	5·967	5·908	5·842	5·769	5·691	5·607	5·518	5·425	5·328
46	6·266	6·225	6·175	6·117	6·050	5·977	5·899	5·814	5·724	5·630	5·532
47	6·479	6·440	6·390	6·331	6·265	6·191	6·112	6·027	5·937	5·842	5·746
48	6·699	6·660	6·611	6·552	6·485	6·412	6·333	6·247	6·156	6·061	5·963
49	6·924	6·886	6·837	6·779	6·713	6·639	6·560	6·474	6·382	6·286	6·181
50	7·156	7·118	7·070	7·012	6·945	6·872	6·792	6·706	6·613	6·517	6·415
51	7·392	7·355	7·308	7·250	7·184	7·111	7·030	6·943	6·851	6·753	6·651
52	7·633	7·598	7·550	7·493	7·427	7·353	7·273	7·186	7·093	6·995	6·892
53	7·879	7·844	7·798	7·741	7·675	7·601	7·521	7·434	7·341	7·242	7·139
54	8·129	8·095	8·049	7·993	7·927	7·854	7·773	7·686	7·592	7·494	7·389
55	8·382	8·349	8·304	8·248	8·183	8·109	8·029	7·942	7·847	7·748	7·644
56	8·638	8·607	8·562	8·507	8·442	8·368	8·288	8·201	8·106	8·007	7·902
57	8·899	8·868	8·824	8·769	8·705	8·631	8·551	8·464	8·369	8·269	8·164
58	9·162	9·132	9·089	9·035	8·970	8·897	8·817	8·730	8·635	8·535	8·430
59	9·427	9·397	9·356	9·303	9·239	9·166	9·086	8·998	8·904	8·804	8·698
60	9·695	9·667	9·626	9·572	9·509	9·436	9·357	9·269	9·174	9·074	8·968
61								9·541	9·446	9·346	9·240
62									9·719	9·618	9·512
63										9·890	9·784
64											10·055
65											
66											
67											
68											
69											
70											
71											
72											
73											
74											
75											

n J a h r e n

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
2-390	2-328	2-265	2-200	2-137	2-072	2-007	1-942	1-877	1-811	1-745
2-486	2-421	2-356	2-289	2-223	2-155	2-088	2-021	1-952	1-884	1-816
2-585	2-520	2-451	2-382	2-313	2-243	2-174	2-103	2-033	1-961	1-890
2-689	2-621	2-551	2-479	2-408	2-335	2-262	2-190	2-116	2-042	1-968
2-797	2-726	2-653	2-580	2-506	2-430	2-355	2-279	2-203	2-126	2-049
2-909	2-836	2-761	2-684	2-609	2-530	2-452	2-373	2-293	2-214	2-134
3-026	2-950	2-873	2-794	2-714	2-635	2-553	2-471	2-389	2-305	2-223
3-147	3-069	2-989	2-908	2-826	2-743	2-660	2-574	2-489	2-402	2-316
3-274	3-194	3-112	3-027	2-943	2-856	2-770	2-683	2-593	2-504	2-414
3-407	3-324	3-239	3-153	3-066	2-976	2-886	2-796	2-705	2-611	2-518
3-544	3-459	3-372	3-283	3-193	3-101	3-008	2-914	2-819	2-724	2-626
3-686	3-599	3-510	3-418	3-325	3-230	3-135	3-038	2-939	2-839	2-740
3-834	3-744	3-653	3-558	3-463	3-365	3-267	3-166	3-064	2-961	2-858
3-987	3-896	3-802	3-705	3-607	3-506	3-405	3-301	3-196	3-089	2-982
4-146	4-053	3-957	3-858	3-757	3-654	3-549	3-443	3-334	3-224	3-113
4-311	4-216	4-118	4-016	3-913	3-807	3-699	3-590	3-478	3-364	3-249
4-482	4-385	4-284	4-181	4-075	3-966	3-856	3-743	3-628	3-510	3-392
4-659	4-560	4-457	4-351	4-243	4-132	4-018	3-903	3-784	3-663	3-541
4-842	4-742	4-637	4-529	4-419	4-305	4-189	4-070	3-948	3-824	3-698
5-031	4-929	4-823	4-713	4-600	4-484	4-365	4-243	4-118	3-991	3-861
5-227	5-124	5-015	4-903	4-789	4-670	4-549	4-424	4-296	4-165	4-032
5-430	5-325	5-215	5-101	4-985	4-864	4-740	4-612	4-481	4-347	4-210
5-640	5-533	5-422	5-306	5-188	5-064	4-938	4-808	4-674	4-537	4-397
5-856	5-748	5-636	5-518	5-398	5-273	5-144	5-011	4-875	4-734	4-591
6-079	5-970	5-856	5-737	5-615	5-488	5-357	5-222	5-083	4-939	4-792
6-309	6-199	6-083	5-963	5-839	5-710	5-577	5-440	5-298	5-151	5-001
6-544	6-433	6-316	6-195	6-069	5-938	5-803	5-664	5-519	5-370	5-217
6-784	6-672	6-555	6-432	6-305	6-173	6-036	5-894	5-748	5-596	5-440
7-030	6-917	6-799	6-675	6-547	6-413	6-275	6-131	5-982	5-828	5-669
7-280	7-167	7-047	6-922	6-795	6-658	6-518	6-373	6-221	6-065	5-904
7-534	7-420	7-300	7-174	7-044	6-907	6-766	6-619	6-465	6-307	6-143
7-792	7-677	7-556	7-430	7-298	7-161	7-018	6-869	6-714	6-554	6-387
8-053	7-938	7-817	7-690	7-557	7-419	7-274	7-124	6-968	6-805	6-637
8-318	8-203	8-081	7-953	7-820	7-680	7-535	7-384	7-226	7-061	6-891
8-586	8-470	8-348	8-219	8-085	7-945	7-795	7-646	7-487	7-321	7-149
8-856	8-740	8-617	8-488	8-353	8-212	8-065	7-911	7-751	7-583	7-409
9-128	9-011	8-888	8-758	8-623	8-481	8-333	8-179	8-017	7-848	7-672
9-400	9-283	9-159	9-029	8-894	8-751	8-603	8-447	8-284	8-114	7-937
9-672	9-554	9-431	9-300	9-164	9-021	8-872	8-716	8-552	8-381	8-202
9-942	9-825	9-701	9-570	9-434	9-291	9-141	8-984	8-819	8-647	8-467
10-212	10-094	9-970	9-839	9-702	9-559	9-408	9-251	9-085	8-912	8-731
	10-361	10-236	10-105	9-969	9-824	9-674	9-515	9-349	9-175	8-994
		10-500	10-369	10-232	10-087	9-936	9-778	9-611	9-436	9-254
			10-629	10-491	10-346	10-195	10-036	9-869	9-694	9-510
				10-746	10-601	10-449	10-290	10-122	9-947	9-763
					10-851	10-699	10-539	10-371	10-195	10-011
						10-943	10-783	10-615	10-438	10-253
							11-022	10-853	10-676	10-491
								11-086	10-909	10-723
									11-136	10-950
										11-173

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
25	1·681	1·614	1·549	1·485	1·421	1·357	1·294	1·233	1·171	1·111	1·052	0·995
26	1·748	1·680	1·612	1·545	1·478	1·412	1·346	1·282	1·218	1·156	1·095	1·035
27	1·820	1·749	1·678	1·608	1·539	1·470	1·401	1·335	1·268	1·203	1·139	1·077
28	1·895	1·821	1·747	1·674	1·602	1·530	1·458	1·389	1·320	1·252	1·186	1·121
29	1·973	1·896	1·819	1·743	1·668	1·593	1·519	1·446	1·374	1·303	1·234	1·167
30	2·055	1·974	1·895	1·815	1·737	1·659	1·581	1·506	1·431	1·357	1·285	1·215
31	2·140	2·057	1·974	1·891	1·809	1·728	1·647	1·569	1·490	1·413	1·338	1·265
32	2·230	2·143	2·057	1·971	1·886	1·801	1·717	1·635	1·553	1·473	1·394	1·318
33	2·325	2·234	2·145	2·055	1·966	1·878	1·790	1·705	1·619	1·536	1·454	1·374
34	2·425	2·331	2·238	2·144	2·052	1·960	1·868	1·779	1·690	1·603	1·517	1·434
35	2·530	2·432	2·334	2·237	2·141	2·045	1·950	1·857	1·764	1·673	1·584	1·496
36	2·639	2·537	2·436	2·335	2·235	2·135	2·035	1·938	1·841	1·746	1·653	1·562
37	2·755	2·648	2·543	2·438	2·333	2·230	2·126	2·024	1·923	1·824	1·727	1·632
38	2·875	2·766	2·656	2·546	2·438	2·329	2·221	2·116	2·010	1·907	1·805	1·706
39	3·001	2·888	2·776	2·661	2·548	2·435	2·322	2·212	2·102	1·994	1·888	1·784
40	3·134	3·016	2·899	2·782	2·663	2·546	2·429	2·313	2·199	2·086	1·975	1·867
41	3·273	3·151	3·029	2·907	2·786	2·663	2·541	2·421	2·301	2·184	2·068	1·955
42	3·418	3·292	3·166	3·039	2·918	2·788	2·659	2·534	2·410	2·286	2·166	2·048
43	3·571	3·441	3·310	3·179	3·048	2·916	2·786	2·654	2·525	2·397	2·270	2·147
44	3·730	3·596	3·461	3·326	3·189	3·053	2·916	2·783	2·646	2·513	2·381	2·251
45	3·897	3·759	3·620	3·479	3·338	3·197	3·055	2·914	2·776	2·635	2·498	2·363
46	4·072	3·930	3·786	3·641	3·495	3·349	3·201	3·056	2·910	2·767	2·622	2·482
47	4·254	4·108	3·960	3·810	3·660	3·508	3·356	3·205	3·053	2·903	2·756	2·608
48	4·445	4·294	4·142	3·988	3·833	3·676	3·518	3·362	3·204	3·048	2·894	2·741
49	4·643	4·489	4·332	4·174	4·014	3·852	3·689	3·527	3·364	3·202	3·041	2·882
50	4·848	4·690	4·530	4·367	4·202	4·036	3·867	3·700	3·531	3·363	3·196	3·031
51	5·061	4·899	4·735	4·568	4·398	4·227	4·053	3·880	3·706	3·532	3·359	3·187
52	5·280	5·115	4·947	4·776	4·602	4·425	4·247	4·068	3·888	3·708	3·529	3·351
53	5·507	5·338	5·166	4·990	4·812	4·631	4·447	4·264	4·078	3·892	3·707	3·522
54	5·738	5·566	5·391	5·211	5·029	4·843	4·654	4·465	4·274	4·082	3·891	3·700
55	5·975	5·800	5·621	5·437	5·251	5·061	4·867	4·673	4·476	4·279	4·081	3·884
56	6·216	6·039	5·856	5·669	5·479	5·284	5·086	4·887	4·685	4·482	4·278	4·075
57	6·464	6·283	6·098	5·907	5·713	5·514	5·312	5·108	4·900	4·692	4·482	4·273
58	6·715	6·532	6·343	6·150	5·952	5·749	5·542	5·334	5·121	4·907	4·692	4·477
59	6·971	6·785	6·594	6·397	6·196	5·989	5·778	5·565	5·348	5·129	4·908	4·687
60	7·229	7·041	6·847	6·648	6·443	6·233	6·018	5·801	5·579	5·355	5·129	4·902
61	7·491	7·301	7·104	6·902	6·694	6·481	6·262	6·041	5·814	5·585	5·354	5·121
62	7·754	7·562	7·363	7·158	6·948	6·731	6·509	6·283	6·053	5·819	5·583	5·345
63	8·018	7·824	7·623	7·416	7·203	6·983	6·757	6·528	6·293	6·055	5·814	5·571
64	8·281	8·085	7·883	7·674	7·458	7·236	7·007	6·774	6·535	6·293	6·048	5·800
65	8·544	8·347	8·142	7·931	7·713	7·488	7·256	7·020	6·778	6·532	6·282	6·030
66	8·805	8·607	8·401	8·187	7·967	7·740	7·505	7·266	7·021	6·771	6·517	6·260
67	9·064	8·864	8·657	8·442	8·220	7·990	7·753	7·512	7·263	7·009	6·752	6·491
68	9·320	9·119	8·910	8·694	8·470	8·238	7·999	7·754	7·503	7·246	6·985	6·720
69	9·571	9·369	9·159	8·941	8·716	8·482	8·241	7·994	7·740	7·480	7·216	6·947
70	9·818	9·615	9·405	9·185	8·958	8·723	8·480	8·231	7·974	7·712	7·444	7·172
71	10·060	9·857	9·645	9·424	9·196	8·959	8·714	8·463	8·204	7·939	7·668	7·393
72	10·297	10·093	9·880	9·659	9·429	9·191	8·944	8·691	8·430	8·163	7·890	7·612
73	10·529	10·324	10·111	9·888	9·657	9·418	9·170	8·915	8·652	8·383	8·107	7·826
74	10·756	10·550	10·336	10·113	9·881	9·640	9·391	9·135	8·870	8·598	8·320	8·037

n J a h r e n

52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
0-939	0-884	0-832	0-781	0-732	0-685	0-639	0-595	0-554	0-515			
0-977	0-920	0-865	0-813	0-761	0-712	0-665	0-619	0-576	0-535	0-496		
1-017	0-957	0-900	0-846	0-792	0-741	0-692	0-644	0-600	0-557	0-516	0-478	
1-058	0-996	0-937	0-880	0-824	0-771	0-720	0-670	0-624	0-580	0-537	0-498	0-460
1-101	1-037	0-975	0-916	0-857	0-802	0-749	0-698	0-649	0-603	0-559	0-518	0-478
1-146	1-079	1-015	0-953	0-892	0-835	0-779	0-726	0-676	0-628	0-581	0-539	0-498
1-194	1-124	1-057	0-992	0-929	0-869	0-811	0-755	0-703	0-653	0-605	0-561	0-518
1-244	1-171	1-101	1-033	0-967	0-905	0-845	0-787	0-732	0-680	0-630	0-584	0-539
1-297	1-220	1-147	1-077	1-008	0-943	0-880	0-820	0-763	0-708	0-656	0-608	0-561
1-353	1-273	1-197	1-124	1-052	0-984	0-918	0-855	0-796	0-739	0-685	0-634	0-585
1-412	1-329	1-249	1-172	1-098	1-026	0-958	0-892	0-830	0-771	0-714	0-661	0-611
1-474	1-387	1-304	1-224	1-145	1-071	1-000	0-931	0-866	0-804	0-745	0-690	0-637
1-540	1-449	1-362	1-278	1-196	1-118	1-044	0-972	0-904	0-839	0-777	0-720	0-664
1-609	1-515	1-423	1-336	1-250	1-169	1-091	1-015	0-944	0-877	0-812	0-752	0-694
1-683	1-584	1-489	1-397	1-308	1-223	1-141	1-062	0-987	0-917	0-849	0-786	0-726
1-762	1-658	1-558	1-462	1-369	1-279	1-194	1-111	1-033	0-959	0-888	0-822	0-759
1-844	1-736	1-632	1-531	1-433	1-340	1-250	1-163	1-082	1-004	0-930	0-860	0-794
1-932	1-819	1-710	1-605	1-502	1-404	1-310	1-219	1-134	1-052	0-974	0-901	0-832
2-026	1-908	1-794	1-683	1-576	1-473	1-374	1-279	1-189	1-104	1-022	0-945	0-873
2-126	2-002	1-883	1-767	1-654	1-547	1-443	1-343	1-249	1-159	1-073	0-993	0-916
2-231	2-102	1-977	1-856	1-738	1-625	1-517	1-412	1-313	1-218	1-128	1-043	0-963
2-345	2-209	2-078	1-952	1-828	1-710	1-596	1-486	1-381	1-282	1-187	1-098	1-014
2-464	2-323	2-186	2-053	1-924	1-800	1-680	1-565	1-455	1-351	1-251	1-158	1-069
2-592	2-444	2-301	2-162	2-027	1-897	1-771	1-650	1-535	1-425	1-320	1-222	1-128
2-727	2-573	2-423	2-278	2-136	2-000	1-868	1-741	1-620	1-505	1-394	1-291	1-192
2-869	2-703	2-553	2-401	2-253	2-110	1-972	1-838	1-712	1-590	1-474	1-365	1-261
3-019	2-852	2-689	2-531	2-376	2-226	2-082	1-942	1-809	1-681	1-559	1-444	1-334
3-176	3-003	2-833	2-668	2-506	2-350	2-199	2-052	1-912	1-778	1-650	1-529	1-413
3-341	3-161	2-984	2-812	2-643	2-480	2-322	2-168	2-022	1-881	1-746	1-619	1-497
3-512	3-325	3-142	2-963	2-787	2-616	2-451	2-291	2-137	1-990	1-848	1-714	1-587
3-690	3-496	3-306	3-120	2-937	2-759	2-587	2-419	2-259	2-104	1-956	1-815	1-681
3-874	3-674	3-477	3-283	3-093	2-908	2-729	2-554	2-386	2-225	2-069	1-922	1-781
4-065	3-858	3-654	3-454	3-257	3-065	2-878	2-695	2-520	2-351	2-189	2-034	1-886
4-263	4-049	3-839	3-631	3-427	3-227	3-033	2-843	2-661	2-485	2-315	2-153	1-998
4-466	4-246	4-029	3-815	3-603	3-396	3-195	2-998	2-808	2-624	2-446	2-277	2-115
4-675	4-449	4-225	4-004	3-785	3-571	3-362	3-158	2-960	2-769	2-584	2-407	2-238
4-889	4-657	4-426	4-198	3-973	3-752	3-535	3-323	3-118	2-920	2-727	2-543	2-366
5-107	4-868	4-632	4-397	4-165	3-937	3-713	3-494	3-282	3-075	2-876	2-684	2-500
5-328	5-084	4-841	4-600	4-361	4-126	3-896	3-669	3-449	3-236	3-028	2-829	2-638
5-551	5-301	5-053	4-806	4-560	4-319	4-081	3-848	3-621	3-400	3-185	2-979	2-780
5-776	5-521	5-266	5-014	4-762	4-514	4-270	4-030	3-796	3-567	3-345	3-137	2-925
6-002	5-742	5-482	5-224	4-966	4-712	4-461	4-214	3-973	3-738	3-509	3-282	3-074
6-228	5-963	5-698	5-434	5-171	4-911	4-654	4-400	4-153	3-911	3-675	3-448	3-226
6-453	6-183	5-914	5-645	5-376	5-110	4-847	4-587	4-333	4-085	3-842	3-607	3-380
6-676	6-402	6-128	5-854	5-580	5-309	5-040	4-774	4-514	4-259	4-010	3-769	3-534
6-897	6-619	6-340	6-062	5-783	5-507	5-233	4-961	4-695	4-434	4-179	3-931	3-690
7-115	6-833	6-551	6-268	5-984	5-703	5-424	5-147	4-875	4-608	4-347	4-093	3-846
7-330	7-045	6-758	6-471	6-183	5-897	5-613	5-331	5-054	4-782	4-514	4-254	4-001
7-541	7-253	6-963	6-672	6-380	6-090	5-801	5-514	5-232	4-954	4-681	4-416	4-157
7-750	7-458	7-165	6-870	6-574	6-280	5-987	5-695	5-408	5-125	4-847	4-576	4-311

(Fortsetzung zu Seite 124 und 125.)

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
75	10-978	10-772	10-557	10-333	10-100	9-859	9-608	9-350	9-084	8-810	8-530	8-245
76	11-196	10-990	10-774	10-550	10-316	10-074	9-821	9-563	9-295	9-020	8-738	8-450
77		11-204	10-988	10-763	10-529	10-285	10-032	9-772	9-503	9-226	8-942	8-653
78			11-199	10-973	10-739	10-494	10-240	9-979	9-709	9-431	9-145	8-854
79				11-183	10-948	10-703	10-448	10-186	9-914	9-635	9-348	9-055
80					11-158	10-912	10-657	10-394	10-121	9-840	9-552	9-257
81						11-125	10-868	10-605	10-331	10-049	9-760	9-463
82							11-087	10-823	10-548	10-266	9-975	9-677
83								11-053	10-778	10-494	10-202	9-903
84									11-027	10-742	10-449	10-149
85										11-022	10-728	10-427
86											11-066	10-764
87												10-962
88												
89												
90												
91												
92												
93												

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
29	0-441											
30	0-459	0-424										
31	0-478	0-441	0-405									
32	0-497	0-459	0-422	0-388								
33	0-518	0-478	0-439	0-404	0-370							
34	0-540	0-498	0-458	0-421	0-386	0-355						
35	0-563	0-519	0-478	0-439	0-403	0-370	0-338					
36	0-587	0-542	0-498	0-458	0-420	0-385	0-353	0-322				
37	0-613	0-565	0-519	0-478	0-438	0-402	0-368	0-336	0-307			
38	0-640	0-590	0-542	0-499	0-457	0-419	0-384	0-351	0-320	0-293		
39	0-669	0-617	0-567	0-521	0-478	0-438	0-401	0-366	0-335	0-306	0-278	
40	0-700	0-645	0-593	0-545	0-499	0-458	0-419	0-383	0-350	0-319	0-291	0-264
41	0-732	0-675	0-620	0-570	0-522	0-479	0-438	0-400	0-365	0-334	0-304	0-276
42	0-767	0-706	0-649	0-597	0-547	0-501	0-458	0-419	0-382	0-349	0-318	0-289
43	0-804	0-741	0-681	0-626	0-573	0-525	0-481	0-439	0-401	0-366	0-333	0-303
44	0-845	0-778	0-715	0-657	0-602	0-551	0-504	0-460	0-420	0-384	0-349	0-317
45	0-888	0-817	0-751	0-690	0-632	0-579	0-530	0-484	0-441	0-403	0-366	0-333
46	0-934	0-861	0-791	0-726	0-665	0-610	0-557	0-509	0-464	0-424	0-385	0-350
47	0-985	0-907	0-833	0-766	0-701	0-642	0-587	0-536	0-489	0-447	0-406	0-369
48	1-040	0-958	0-880	0-808	0-740	0-678	0-620	0-566	0-517	0-472	0-429	0-390
49	1-099	1-012	0-930	0-855	0-783	0-718	0-656	0-599	0-547	0-499	0-454	0-412

in Jahren												
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
7-955	7-661	7-364	7-066	6-767	6-468	6-171	5-875	5-583	5-296	5-012	4-736	4-466
8-158	7-861	7-561	7-260	6-957	6-655	6-354	6-054	5-758	5-465	5-177	4-896	4-621
8-358	8-059	7-757	7-453	7-147	6-841	6-536	6-232	5-932	5-635	5-342	5-056	4-776
8-557	8-255	7-951	7-644	7-335	7-026	6-718	6-410	6-106	5-805	5-507	5-217	4-932
8-756	8-452	8-145	7-836	7-524	7-212	6-901	6-589	6-281	5-976	5-674	5-379	5-090
8-957	8-651	8-342	8-030	7-716	7-401	7-086	6-771	6-460	6-151	5-845	5-545	5-251
9-161	8-854	8-542	8-229	7-911	7-594	7-276	6-958	6-643	6-330	6-021	5-717	5-419
9-374	9-064	8-751	8-435	8-115	7-795	7-475	7-154	6-835	6-519	6-205	5-898	5-595
9-598	9-287	8-972	8-654	8-332	8-010	7-686	7-362	7-041	6-721	6-404	6-092	5-785
9-843	9-530	9-214	8-894	8-570	8-245	7-919	7-592	7-268	6-945	6-624	6-309	5-997
10-119	9-805	9-487	9-165	8-839	8-512	8-184	7-855	7-527	7-201	6-877	6-558	6-243
10-456	10-140	9-820	9-497	9-169	8-840	8-510	8-178	7-848	7-519	7-192	6-869	6-551
10-653	10-337	10-016	9-692	9-363	9-033	8-701	8-368	8-036	7-705	7-376	7-051	6-730
10-859	10-542	10-221	9-895	9-566	9-234	8-901	8-567	8-234	7-901	7-570	7-244	6-921
	10-725	10-403	10-077	9-747	9-414	9-080	8-745	8-410	8-077	7-744	7-416	7-092
		10-549	10-222	9-891	9-558	9-224	8-887	8-552	8-217	7-884	7-555	7-229
			10-366	10-035	9-701	9-366	9-029	8-693	8-357	8-023	7-693	7-366
				10-189	9-855	9-519	9-182	8-845	8-508	8-173	7-842	7-514
					10-000	9-663	9-325	8-988	8-651	8-315	7-983	7-654

in Jahren												
77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0-251												
0-263	0-239											
0-275	0-250	0-227										
0-289	0-262	0-238	0-215									
0-303	0-275	0-249	0-225	0-204								
0-319	0-289	0-262	0-237	0-214	0-193							
0-336	0-304	0-276	0-249	0-225	0-204	0-183						
0-354	0-321	0-291	0-263	0-238	0-215	0-193	0-173					
0-375	0-340	0-308	0-279	0-252	0-227	0-204	0-183	0-163				

(Fortsetzung zu Seite 126 und 127.)

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau											
	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
50	1-163	1-071	0-985	0-905	0-829	0-760	0-695	0-635	0-579	0-528	0-481	0-437
51	1-231	1-135	1-043	0-959	0-879	0-806	0-737	0-673	0-615	0-561	0-510	0-464
52	1-305	1-203	1-106	1-017	0-933	0-855	0-782	0-715	0-653	0-596	0-542	0-493
53	1-383	1-276	1-174	1-079	0-990	0-908	0-831	0-760	0-694	0-633	0-576	0-524
54	1-466	1-353	1-246	1-146	1-052	0-965	0-883	0-808	0-738	0-674	0-613	0-558
55	1-554	1-435	1-322	1-216	1-117	1-025	0-939	0-859	0-785	0-717	0-653	0-594
56	1-647	1-522	1-403	1-292	1-187	1-090	0-998	0-914	0-835	0-763	0-695	0-633
57	1-746	1-614	1-489	1-372	1-261	1-159	1-062	0-973	0-890	0-813	0-741	0-675
58	1-851	1-712	1-580	1-457	1-340	1-232	1-130	1-036	0-948	0-866	0-790	0-720
59	1-961	1-815	1-677	1-547	1-424	1-310	1-203	1-103	1-010	0-924	0-843	0-769
60	2-077	1-924	1-779	1-642	1-513	1-393	1-280	1-174	1-076	0-985	0-899	0-821
61	2-198	2-038	1-886	1-743	1-607	1-480	1-361	1-250	1-146	1-050	0-960	0-876
62	2-324	2-157	1-998	1-848	1-705	1-572	1-447	1-330	1-220	1-119	1-023	0-935
63	2-455	2-280	2-114	1-957	1-808	1-669	1-537	1-414	1-298	1-191	1-091	0-997
64	2-589	2-408	2-234	2-071	1-915	1-769	1-631	1-501	1-380	1-267	1-161	1-063
65	2-728	2-539	2-358	2-188	2-025	1-872	1-728	1-592	1-465	1-347	1-235	1-132
66	2-869	2-674	2-486	2-308	2-139	1-980	1-829	1-687	1-554	1-429	1-312	1-203
67	3-014	2-811	2-617	2-432	2-256	2-090	1-933	1-784	1-645	1-515	1-392	1-278
68	3-161	2-951	2-749	2-558	2-375	2-203	2-039	1-884	1-739	1-603	1-475	1-355
69	3-309	3-092	2-884	2-686	2-496	2-317	2-147	1-987	1-835	1-694	1-559	1-434
70	3-458	3-235	3-020	2-815	2-619	2-434	2-257	2-091	1-933	1-786	1-646	1-515
71	3-607	3-378	3-156	2-945	2-743	2-551	2-369	2-196	2-033	1-879	1-734	1-598
72	3-757	3-521	3-293	3-076	2-867	2-670	2-481	2-302	2-133	1-974	1-824	1-682
73	3-906	3-664	3-431	3-207	2-993	2-789	2-594	2-410	2-235	2-070	1-914	1-767
74	4-055	3-808	3-568	3-339	3-118	2-909	2-708	2-518	2-338	2-167	2-006	1-854
75	4-204	3-951	3-706	3-471	3-245	3-029	2-823	2-627	2-441	2-266	2-099	1-941
76	4-354	4-095	3-844	3-604	3-372	3-151	2-939	2-738	2-546	2-365	2-193	2-031
77	4-504	4-240	3-984	3-738	3-500	3-274	3-057	2-850	2-653	2-466	2-289	2-121
78	4-654	4-385	4-124	3-873	3-630	3-398	3-176	2-963	2-761	2-569	2-386	2-214
79	4-808	4-534	4-267	4-011	3-763	3-525	3-298	3-080	2-872	2-675	2-487	2-309
80	4-964	4-686	4-414	4-153	3-899	3-657	3-424	3-200	2-988	2-785	2-592	2-408
81	5-127	4-844	4-567	4-301	4-042	3-794	3-556	3-327	3-109	2-901	2-702	2-513
82	5-299	5-010	4-730	4-458	4-194	3-941	3-697	3-463	3-239	3-026	2-822	2-627
83	5-485	5-192	4-906	4-630	4-361	4-102	3-853	3-613	3-384	3-165	2-955	2-755
84	5-693	5-396	5-105	4-823	4-549	4-286	4-031	3-786	3-550	3-325	3-109	2-903
85	5-934	5-633	5-337	5-051	4-771	4-503	4-243	3-992	3-751	3-520	3-298	3-085
86	6-238	5-931	5-632	5-341	5-057	4-781	4-518	4-261	4-014	3-778	3-549	3-331
87	6-415	6-107	5-803	5-510	5-223	4-946	4-674	4-417	4-167	3-926	3-694	3-472
88	6-603	6-293	5-988	5-689	5-401	5-121	4-849	4-586	4-332	4-088	3-853	3-627
89	6-773	6-460	6-153	5-854	5-558	5-279	5-005	4-739	4-483	4-236	3-998	3-769
90	6-908	6-594	6-286	5-985	5-691	5-407	5-131	4-863	4-605	4-356	4-115	3-884
91	7-044	6-729	6-419	6-117	5-821	5-535	5-257	4-987	4-728	4-476	4-233	4-000
92	7-191	6-875	6-563	6-260	5-963	5-675	5-396	5-124	4-862	4-610	4-365	4-129
93	7-330	7-012	6-700	6-395	6-097	5-808	5-527	5-254	4-990	4-735	4-488	4-251

in Jahren

77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0:397	0:360	0:327	0:295	0:267	0:241	0:216	0:194	0:173	0:155			
0:422	0:383	0:347	0:313	0:283	0:256	0:229	0:206	0:184	0:164	0:147		
0:448	0:407	0:368	0:333	0:301	0:272	0:244	0:219	0:195	0:175	0:157	0:139	
0:477	0:433	0:392	0:355	0:320	0:289	0:260	0:233	0:208	0:186	0:167	0:148	0:130
0:507	0:461	0:418	0:378	0:341	0:308	0:277	0:248	0:222	0:198	0:178	0:158	0:139
0:540	0:491	0:445	0:403	0:364	0:329	0:295	0:265	0:237	0:212	0:190	0:169	0:148
0:576	0:523	0:474	0:429	0:388	0:351	0:315	0:283	0:253	0:226	0:203	0:180	0:158
0:614	0:558	0:507	0:459	0:415	0:375	0:337	0:302	0:270	0:242	0:217	0:192	0:169
0:656	0:596	0:541	0:490	0:443	0:401	0:360	0:323	0:289	0:259	0:232	0:206	0:181
0:700	0:637	0:578	0:524	0:474	0:429	0:386	0:347	0:310	0:277	0:249	0:221	0:194
0:748	0:681	0:618	0:561	0:508	0:459	0:413	0:371	0:333	0:297	0:267	0:237	0:209
0:799	0:728	0:662	0:600	0:544	0:492	0:443	0:398	0:357	0:320	0:287	0:255	0:224
0:854	0:778	0:708	0:642	0:582	0:527	0:475	0:427	0:383	0:343	0:308	0:274	0:241
0:911	0:831	0:756	0:687	0:623	0:565	0:509	0:458	0:411	0:368	0:331	0:295	0:260
0:972	0:887	0:808	0:735	0:667	0:604	0:545	0:491	0:441	0:395	0:356	0:317	0:279
1:035	0:946	0:862	0:785	0:713	0:647	0:584	0:527	0:473	0:424	0:382	0:341	0:300
1:102	1:008	0:920	0:838	0:761	0:691	0:625	0:564	0:507	0:455	0:410	0:366	0:323
1:171	1:072	0:979	0:893	0:812	0:738	0:668	0:603	0:543	0:488	0:440	0:393	0:347
1:243	1:139	1:042	0:950	0:866	0:787	0:713	0:644	0:581	0:522	0:471	0:421	0:373
1:317	1:208	1:106	1:010	0:921	0:838	0:760	0:687	0:620	0:558	0:504	0:451	0:400
1:393	1:279	1:172	1:071	0:978	0:891	0:808	0:732	0:661	0:595	0:538	0:482	0:428
1:471	1:351	1:239	1:134	1:036	0:945	0:858	0:778	0:703	0:634	0:573	0:515	0:457
1:550	1:425	1:308	1:198	1:096	1:000	0:910	0:825	0:747	0:674	0:611	0:548	0:487
1:630	1:500	1:379	1:264	1:157	1:057	0:962	0:874	0:792	0:715	0:648	0:583	0:518
1:711	1:576	1:540	1:331	1:219	1:115	1:016	0:924	0:837	0:757	0:687	0:619	0:551
1:793	1:654	1:523	1:399	1:283	1:174	1:071	0:975	0:884	0:800	0:727	0:655	0:584
1:878	1:733	1:597	1:469	1:348	1:235	1:128	1:027	0:933	0:845	0:769	0:693	0:619
1:963	1:814	1:673	1:540	1:415	1:297	1:186	1:081	0:983	0:891	0:811	0:733	0:655
2:051	1:896	1:751	1:613	1:483	1:361	1:245	1:136	1:034	0:938	0:855	0:773	0:691
2:141	1:981	1:831	1:688	1:554	1:427	1:307	1:193	1:087	0:987	0:900	0:815	0:730
2:235	2:070	1:915	1:767	1:628	1:496	1:371	1:254	1:143	1:039	0:948	0:859	0:770
2:335	2:165	2:004	1:851	1:707	1:570	1:440	1:318	1:202	1:094	0:999	0:906	0:813
2:443	2:268	2:101	1:943	1:793	1:652	1:516	1:389	1:268	1:155	1:056	0:958	0:860
2:565	2:384	2:212	2:047	1:892	1:744	1:603	1:470	1:344	1:225	1:122	1:019	0:916
2:707	2:520	2:342	2:172	2:010	1:856	1:709	1:569	1:437	1:312	1:203	1:095	0:986
2:883	2:690	2:505	2:328	2:160	1:999	1:845	1:698	1:559	1:427	1:313	1:198	1:083
3:122	2:922	2:731	2:547	2:372	2:204	2:043	1:888	1:741	1:601	1:481	1:360	1:237
3:260	3:054	2:860	2:672	2:492	2:320	2:154	1:995	1:843	1:698	1:574	1:449	1:321
3:411	3:203	3:001	2:812	2:627	2:451	2:280	2:117	1:960	1:810	1:682	1:553	1:421
3:550	3:339	3:136	2:936	2:753	2:573	2:399	2:232	2:071	1:917	1:785	1:652	1:516
3:662	3:448	3:243	3:045	2:855	2:672	2:495	2:324	2:160	2:002	1:868	1:732	1:594
3:776	3:560	3:352	3:152	2:959	2:774	2:594	2:420	2:253	2:092	1:954	1:816	1:675
3:903	3:685	3:475	3:272	3:077	2:888	2:706	2:529	2:358	2:194	2:054	1:913	1:769
4:023	3:802	3:590	3:385	3:188	2:997	2:812	2:632	2:458	2:290	2:148	2:005	1:858

Bruderladen.

9

Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau in Jahren								
	90	91	92	93	94	95	96	97	98
54	0-120								
55	0-128	0-109							
56	0-136	0-116	0-096						
57	0-146	0-124	0-103	0-084					
58	0-156	0-133	0-111	0-090	0-068				
59	0-168	0-143	0-119	0-097	0-073	0-054			
60	0-180	0-153	0-128	0-104	0-078	0-059	0-042		
61	0-194	0-165	0-138	0-112	0-084	0-063	0-046	0-031	
62	0-209	0-178	0-148	0-121	0-091	0-068	0-049	0-033	0-014
63	0-225	0-192	0-160	0-130	0-098	0-074	0-053	0-036	0-015
64	0-242	0-206	0-172	0-140	0-106	0-080	0-057	0-039	0-016
65	0-260	0-222	0-186	0-151	0-114	0-086	0-062	0-042	0-017
66	0-280	0-240	0-200	0-163	0-124	0-093	0-067	0-045	0-019
67	0-301	0-258	0-216	0-176	0-133	0-100	0-073	0-049	0-020
68	0-324	0-278	0-233	0-190	0-144	0-109	0-078	0-053	0-022
69	0-348	0-298	0-250	0-205	0-155	0-117	0-085	0-057	0-024
70	0-372	0-320	0-269	0-220	0-167	0-126	0-091	0-062	0-026
71	0-398	0-343	0-288	0-236	0-180	0-136	0-099	0-067	0-028
72	0-425	0-366	0-309	0-253	0-193	0-146	0-106	0-072	0-030
73	0-453	0-391	0-330	0-272	0-207	0-157	0-114	0-078	0-032
74	0-481	0-417	0-352	0-290	0-222	0-168	0-122	0-084	0-035
75	0-512	0-441	0-375	0-309	0-236	0-180	0-131	0-090	0-037
76	0-543	0-470	0-396	0-329	0-252	0-192	0-140	0-096	0-040
77	0-575	0-499	0-423	0-350	0-268	0-205	0-150	0-103	0-043
78	0-608	0-528	0-449	0-372	0-285	0-218	0-160	0-110	0-046
79	0-642	0-559	0-475	0-394	0-303	0-232	0-170	0-118	0-049
80	0-678	0-590	0-503	0-418	0-321	0-247	0-181	0-126	0-052
81	0-717	0-624	0-532	0-442	0-341	0-262	0-193	0-134	0-056
82	0-759	0-662	0-564	0-469	0-362	0-278	0-205	0-143	0-060
83	0-809	0-706	0-602	0-501	0-386	0-296	0-218	0-152	0-064
84	0-873	0-762	0-651	0-541	0-417	0-320	0-234	0-162	0-068
85	0-962	0-844	0-723	0-603	0-466	0-357	0-263	0-179	0-072
86	1-107	0-980	0-850	0-719	0-563	0-440	0-330	0-234	0-100
87	1-187	1-054	0-917	0-780	0-613	0-481	0-362	0-258	0-110
88	1-281	1-143	0-999	0-855	0-679	0-534	0-406	0-293	0-127
89	1-372	1-230	1-080	0-929	0-740	0-597	0-452	0-331	0-146
90	1-445	1-299	1-148	0-990	0-792	0-633	0-488	0-361	0-161
91	1-523	1-373	1-215	1-061	0-847	0-681	0-529	0-394	0-178
92	1-613	1-460	1-297	1-133	0-937	0-741	0-579	0-437	0-202
93	1-698	1-541	1-376	1-206	0-978	0-794	0-626	0-475	0-214

Monatliche Prämie,

nachhinein und auf die

**Dauer des gleichzeitigen Lebens zweier Ehegatten
zahlbar,**

zur

Erwerbung des Anspruches auf die Witwenrente
von jährlich 100.

Alter des Mannes in Jahren	A l t e r d e r F r a u										
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
25	1·65	1·62	1·60	1·57	1·54	1·51	1·49	1·46	1·43	1·40	1·37
26	1·72	1·70	1·67	1·64	1·61	1·59	1·56	1·53	1·49	1·46	1·43
27	1·80	1·78	1·75	1·72	1·69	1·66	1·63	1·60	1·57	1·53	1·50
28	1·89	1·86	1·83	1·80	1·77	1·74	1·71	1·67	1·64	1·61	1·57
29	1·97	1·94	1·92	1·88	1·85	1·82	1·79	1·75	1·72	1·68	1·65
30	2·07	2·04	2·00	1·97	1·94	1·91	1·87	1·84	1·80	1·76	1·73
31	2·16	2·13	2·10	2·07	2·03	2·00	1·96	1·92	1·89	1·85	1·81
32	2·26	2·23	2·20	2·16	2·13	2·09	2·06	2·02	1·98	1·94	1·90
33	2·37	2·34	2·30	2·27	2·23	2·19	2·16	2·12	2·08	2·03	1·99
34	2·48	2·45	2·41	2·38	2·34	2·30	2·26	2·22	2·18	2·14	2·09
35	2·60	2·57	2·53	2·49	2·45	2·41	2·37	2·33	2·29	2·24	2·20
36	2·72	2·69	2·65	2·62	2·57	2·53	2·49	2·45	2·40	2·36	2·31
37	2·86	2·82	2·78	2·74	2·70	2·66	2·62	2·57	2·52	2·48	2·43
38	2·99	2·96	2·92	2·88	2·84	2·79	2·75	2·70	2·65	2·60	2·55
39	3·14	3·10	3·06	3·02	2·98	2·93	2·89	2·84	2·79	2·74	2·69
40	3·30	3·26	3·22	3·18	3·13	3·08	3·04	2·99	2·94	2·88	2·83
41	3·46	3·42	3·38	3·34	3·29	3·24	3·19	3·14	3·09	3·04	2·98
42	3·63	3·59	3·55	3·51	3·46	3·41	3·36	3·31	3·25	3·20	3·14
43	3·82	3·78	3·73	3·69	3·64	3·59	3·54	3·48	3·43	3·37	3·31
44	4·01	3·97	3·93	3·88	3·83	3·78	3·73	3·67	3·61	3·55	3·49
45	4·22	4·18	4·13	4·09	4·04	3·98	3·93	3·87	3·81	3·75	3·68
46	4·41	4·40	4·35	4·31	4·25	4·20	4·14	4·08	4·02	3·96	3·89
47	4·68	4·63	4·59	4·54	4·49	4·43	4·37	4·31	4·25	4·18	4·11
48	4·93	4·89	4·84	4·79	4·73	4·68	4·62	4·55	4·49	4·42	4·35
49	5·20	5·15	5·11	5·05	5·00	4·94	4·88	4·81	4·75	4·68	4·60
50	5·49	5·44	5·39	5·34	5·28	5·22	5·16	5·09	5·02	4·95	4·88
51	5·80	5·75	5·70	5·64	5·58	5·52	5·46	5·39	5·32	5·24	5·17
52	6·12	6·08	6·02	5·97	5·91	5·84	5·78	5·71	5·63	5·56	5·48
53	6·47	6·42	6·37	6·31	6·25	6·19	6·12	6·05	5·97	5·89	5·81
54	6·85	6·80	6·74	6·68	6·62	6·55	6·48	6·41	6·33	6·25	6·16
55	7·26	7·20	7·14	7·08	7·01	6·95	6·87	6·80	6·72	6·63	6·54
56	7·67	7·62	7·56	7·50	7·44	7·36	7·29	7·21	7·13	7·04	6·95
57	8·13	8·08	8·02	7·95	7·89	7·81	7·73	7·65	7·57	7·48	7·38
58	8·62	8·56	8·50	8·44	8·37	8·29	8·21	8·13	8·04	7·95	7·85
59	9·14	9·08	9·02	8·96	8·89	8·81	8·73	8·61	8·55	8·45	8·35
60	9·72	9·65	9·58	9·51	9·44	9·36	9·28	9·18	9·09	8·99	8·89

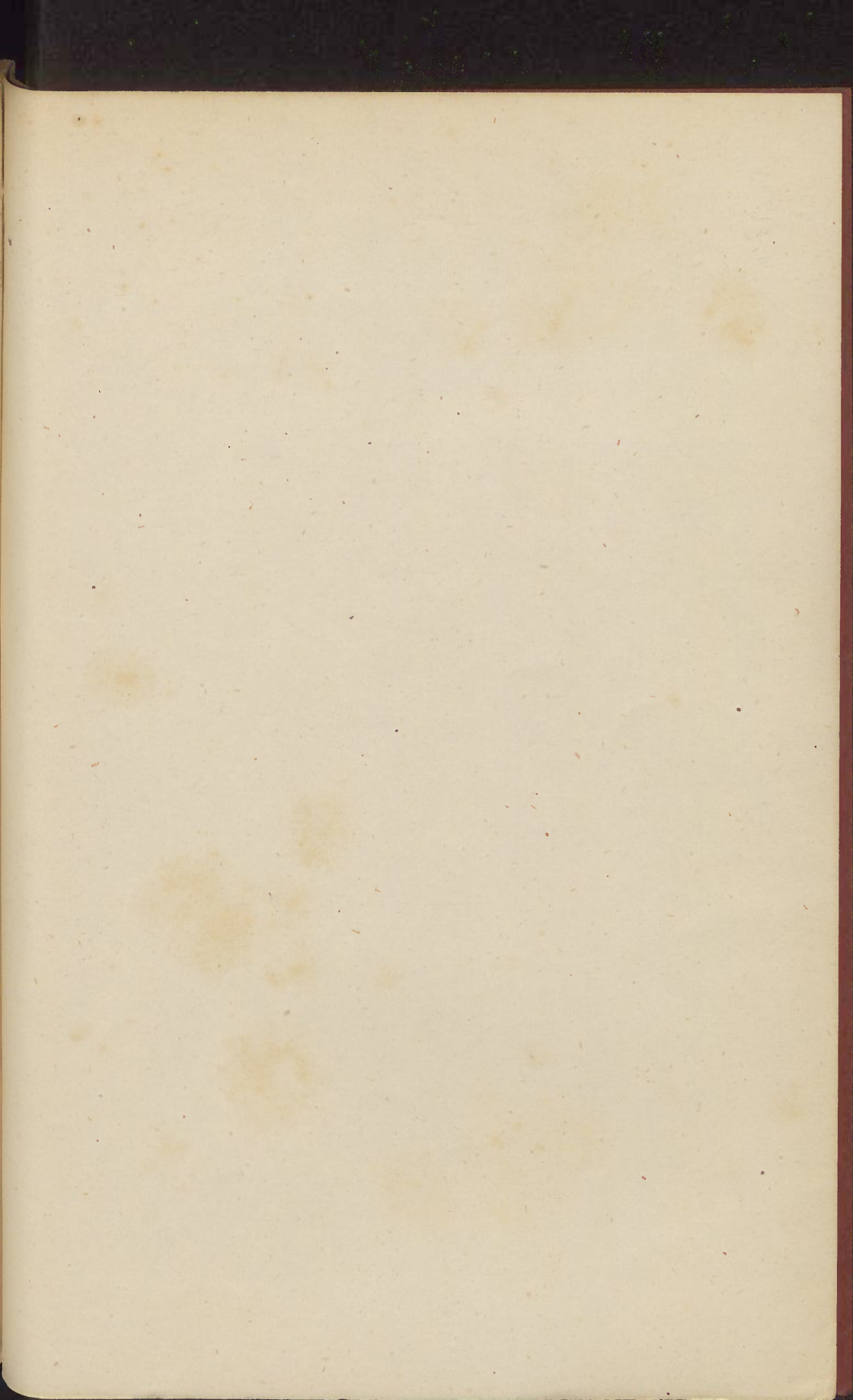
in Jahren

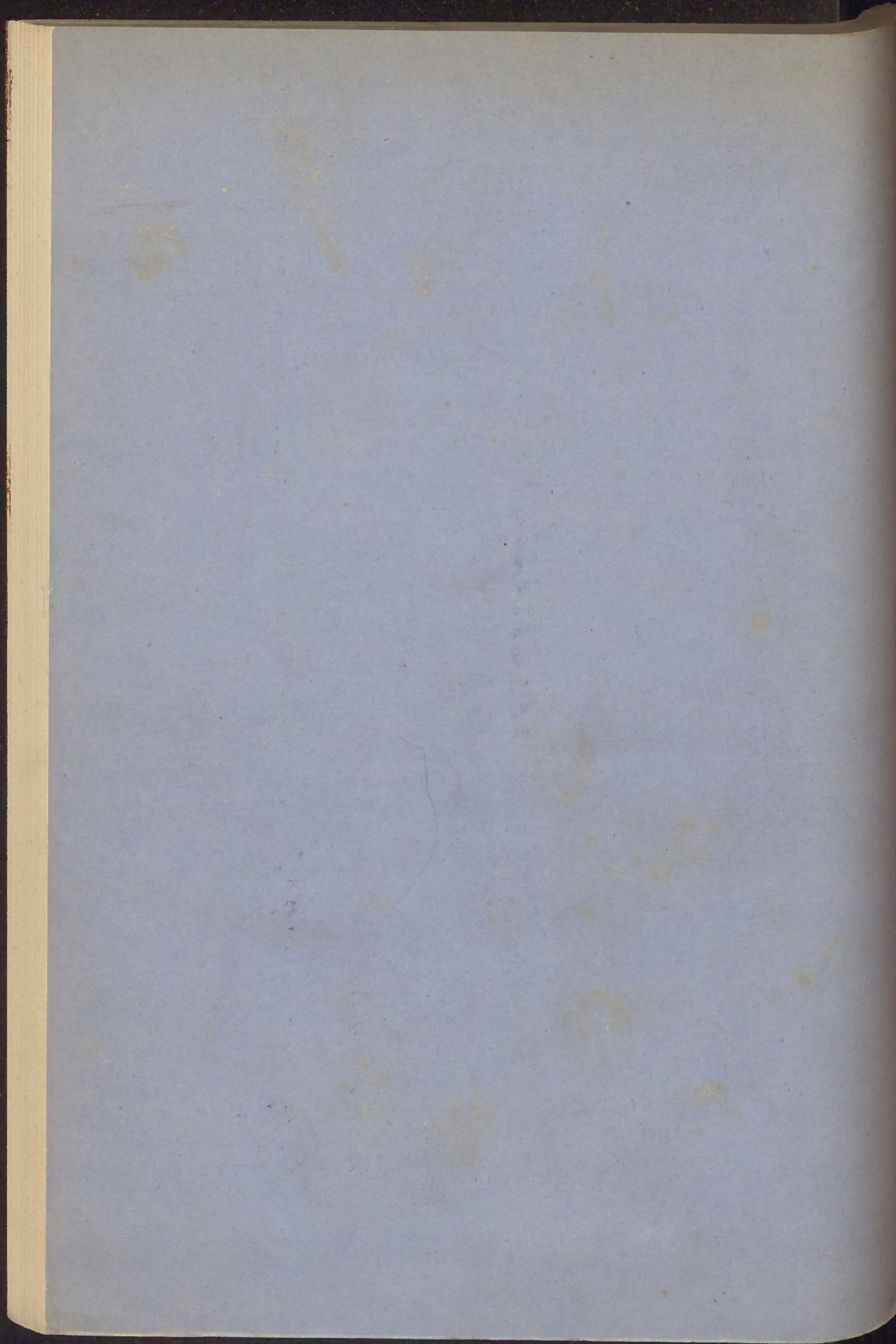
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
1·34	1·31	1·28	1·25	1·22	1·19	1·16	1·13	1·10	1·07	1·04
1·40	1·37	1·34	1·31	1·28	1·24	1·21	1·18	1·15	1·12	1·09
1·47	1·44	1·40	1·37	1·33	1·30	1·27	1·24	1·20	1·17	1·14
1·54	1·50	1·47	1·43	1·40	1·36	1·33	1·29	1·26	1·22	1·19
1·61	1·58	1·54	1·50	1·47	1·43	1·39	1·36	1·32	1·28	1·25
1·69	1·65	1·61	1·57	1·54	1·50	1·46	1·42	1·38	1·34	1·31
1·77	1·73	1·69	1·65	1·61	1·57	1·53	1·49	1·45	1·41	1·37
1·86	1·82	1·77	1·73	1·69	1·65	1·61	1·56	1·52	1·48	1·44
1·95	1·91	1·86	1·82	1·78	1·73	1·69	1·64	1·60	1·55	1·51
2·05	2·00	1·96	1·91	1·87	1·82	1·77	1·73	1·68	1·63	1·59
2·15	2·11	2·06	2·01	1·96	1·91	1·86	1·82	1·77	1·72	1·67
2·26	2·21	2·16	2·11	2·06	2·01	1·96	1·91	1·86	1·81	1·75
2·38	2·33	2·28	2·22	2·17	2·12	2·06	2·01	1·96	1·90	1·85
2·50	2·45	2·40	2·34	2·29	2·23	2·17	2·12	2·06	2·00	1·94
2·63	2·58	2·52	2·47	2·41	2·35	2·29	2·23	2·17	2·11	2·05
2·77	2·72	2·66	2·60	2·54	2·48	2·42	2·36	2·29	2·23	2·17
2·92	2·86	2·80	2·74	2·68	2·61	2·55	2·49	2·42	2·35	2·29
3·08	3·02	2·96	2·89	2·83	2·76	2·69	2·63	2·56	2·49	2·42
3·25	3·19	3·12	3·05	2·99	2·92	2·85	2·78	2·70	2·63	2·56
3·43	3·36	3·29	3·23	3·15	3·08	3·01	2·93	2·86	2·78	2·71
3·62	3·55	3·48	3·41	3·34	3·26	3·18	3·11	3·03	2·95	2·87
3·82	3·75	3·68	3·61	3·53	3·45	3·37	3·29	3·21	3·12	3·04
4·04	3·97	3·90	3·82	3·74	3·66	3·57	3·49	3·40	3·31	3·23
4·28	4·20	4·12	4·04	3·96	3·88	3·79	3·70	3·61	3·52	3·43
4·53	4·45	4·37	4·29	4·20	4·11	4·02	3·93	3·84	3·74	3·64
4·80	4·72	4·63	4·55	4·46	4·37	4·27	4·18	4·08	3·98	3·88
5·09	5·00	4·92	4·83	4·73	4·64	4·54	4·44	4·34	4·23	4·13
5·39	5·31	5·22	5·13	5·03	4·93	4·83	4·72	4·62	4·51	4·39
5·72	5·63	5·54	5·45	5·35	5·24	5·14	5·03	4·92	4·80	4·68
6·08	5·98	5·89	5·79	5·68	5·58	5·47	5·35	5·24	5·12	4·99
6·45	6·36	6·26	6·15	6·05	5·93	5·82	5·70	5·58	5·45	5·33
6·85	6·76	6·65	6·55	6·43	6·32	6·20	6·07	5·95	5·82	5·68
7·28	7·18	7·08	6·97	6·85	6·73	6·60	6·48	6·34	6·21	6·07
7·75	7·64	7·53	7·42	7·30	7·17	7·04	6·91	6·77	6·62	6·48
8·24	8·13	8·02	7·90	7·77	7·64	7·51	7·37	7·23	7·08	6·92
8·78	8·66	8·54	8·42	8·29	8·15	8·01	7·87	7·72	7·56	7·40

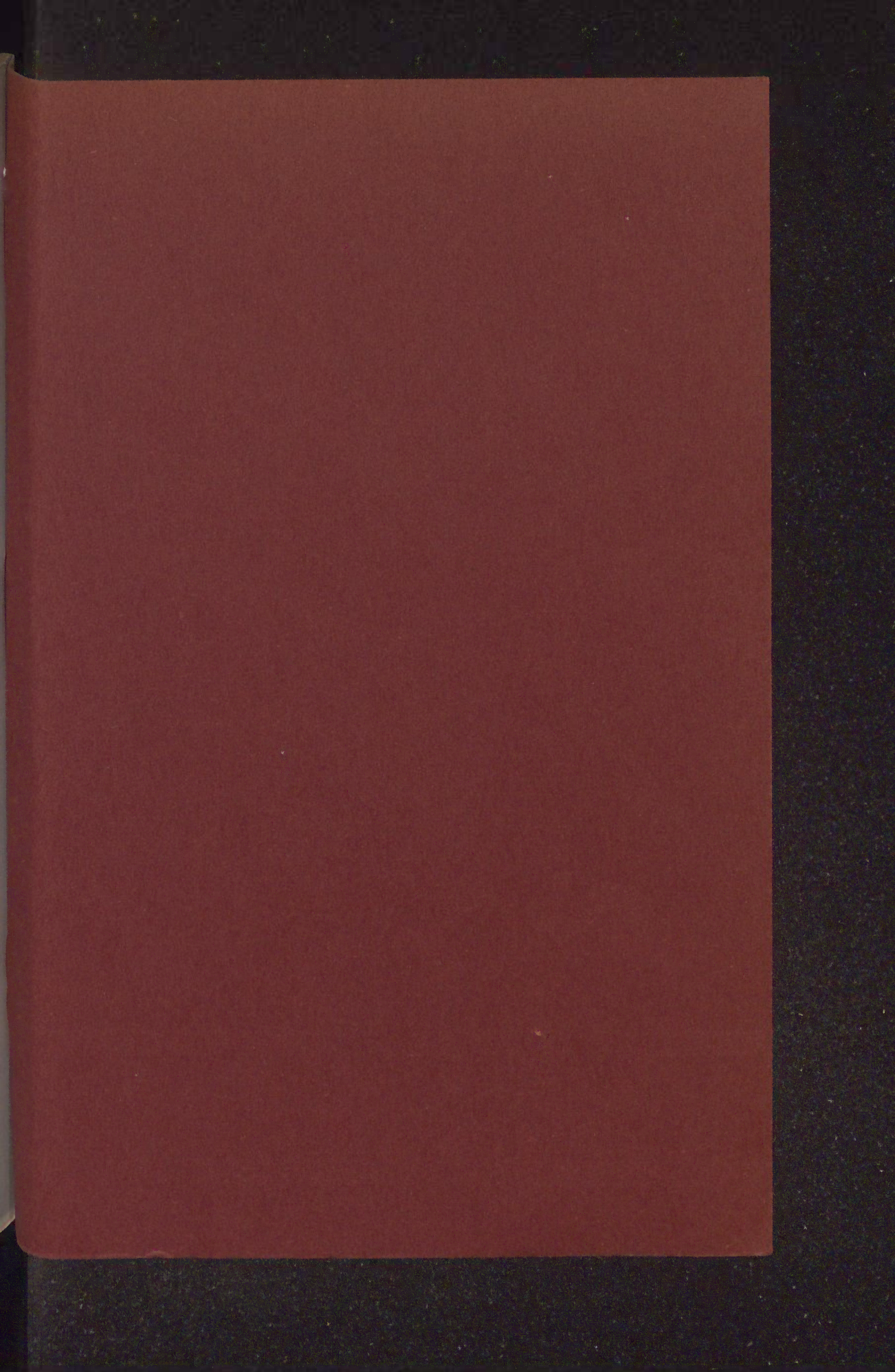
Alter des Mannes in Jahren	Alter der Frau									
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
25	1·01	0·98	0·95	0·92	0·89	0·87	0·84	0·81	0·78	0·76
26	1·05	1·02	0·99	0·96	0·93	0·91	0·88	0·85	0·82	0·79
27	1·10	1·07	1·04	1·01	0·98	0·95	0·92	0·89	0·86	0·83
28	1·16	1·12	1·09	1·05	1·02	0·99	0·96	0·93	0·90	0·86
29	1·21	1·17	1·14	1·01	1·07	1·04	1·00	0·97	0·94	0·90
30	1·27	1·23	1·19	1·16	1·12	1·08	1·05	1·01	0·98	0·95
31	1·33	1·29	1·25	1·21	1·17	1·14	1·10	1·06	1·02	0·99
32	1·39	1·35	1·31	1·27	1·23	1·19	1·15	1·11	1·07	1·04
33	1·46	1·42	1·38	1·33	1·29	1·25	1·21	1·17	1·13	1·09
34	1·54	1·49	1·45	1·40	1·36	1·31	1·27	1·22	1·18	1·14
35	1·62	1·57	1·52	1·47	1·42	1·38	1·33	1·29	1·24	1·20
36	1·70	1·65	1·60	1·55	1·50	1·45	1·40	1·35	1·30	1·26
37	1·79	1·74	1·68	1·63	1·58	1·53	1·47	1·42	1·37	1·32
38	1·89	1·83	1·77	1·72	1·66	1·61	1·55	1·50	1·44	1·39
39	1·99	1·93	1·87	1·81	1·75	1·69	1·64	1·58	1·52	1·47
40	2·10	2·04	1·98	1·91	1·85	1·79	1·73	1·67	1·61	1·55
41	2·22	2·15	2·09	2·02	1·95	1·89	1·82	1·76	1·70	1·63
42	2·35	2·28	2·21	2·13	2·07	2·00	1·93	1·86	1·79	1·73
43	2·48	2·41	2·33	2·26	2·19	2·11	2·04	1·97	1·90	1·83
44	2·63	2·55	2·47	2·39	2·32	2·24	2·16	2·09	2·01	1·94
45	2·78	2·70	2·62	2·54	2·46	2·38	2·29	2·21	2·14	2·06
46	2·95	2·87	2·78	2·69	2·61	2·52	2·44	2·35	2·27	2·19
47	3·14	3·05	2·95	2·86	2·77	2·68	2·59	2·50	2·41	2·32
48	3·33	3·24	3·14	3·05	2·95	2·85	2·76	2·66	2·57	2·47
49	3·54	3·44	3·34	3·24	3·14	3·04	2·94	2·84	2·74	2·64
50	3·77	3·67	3·56	3·45	3·35	3·24	3·13	3·03	2·92	2·82
51	4·02	3·91	3·80	3·68	3·57	3·46	3·34	3·23	3·12	3·01
52	4·28	4·17	4·05	3·93	3·81	3·69	3·57	3·45	3·33	3·22
53	4·57	4·44	4·32	4·20	4·07	3·95	3·82	3·69	3·57	3·44
54	4·87	4·74	4·61	4·48	4·35	4·22	4·08	3·95	3·82	3·68
55	5·20	5·06	4·93	4·79	4·65	4·51	4·37	4·23	4·09	3·94
56	5·54	5·41	5·26	5·12	4·97	4·82	4·68	4·53	4·38	4·23
57	5·92	5·78	5·63	5·47	5·32	5·16	5·01	4·85	4·69	4·53
58	6·33	6·17	6·02	5·86	5·69	5·53	5·36	5·20	5·03	4·86
59	6·77	6·60	6·44	6·27	6·10	5·92	5·75	5·57	5·40	5·22
60	7·23	7·06	6·89	6·71	6·53	6·35	6·17	5·98	5·79	5·60

i n J a h r e n

50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0.73	0.71	0.68	0.66	0.63	0.61	0.59	0.57	0.54	0.52	0.50
0.77	0.74	0.71	0.69	0.66	0.64	0.61	0.59	0.57	0.54	0.52
0.80	0.77	0.74	0.72	0.69	0.67	0.64	0.62	0.59	0.57	0.55
0.84	0.81	0.78	0.75	0.72	0.69	0.67	0.65	0.62	0.59	0.57
0.87	0.84	0.81	0.78	0.75	0.73	0.70	0.67	0.64	0.62	0.59
0.91	0.88	0.85	0.82	0.79	0.76	0.73	0.70	0.67	0.65	0.62
0.95	0.92	0.89	0.85	0.82	0.79	0.76	0.73	0.70	0.67	0.65
1.00	0.96	0.93	0.89	0.86	0.83	0.80	0.76	0.73	0.71	0.68
1.05	1.01	0.97	0.94	0.90	0.87	0.83	0.80	0.77	0.74	0.71
1.10	1.06	1.02	0.98	0.94	0.91	0.87	0.84	0.80	0.77	0.74
1.15	1.11	1.07	1.03	0.99	0.95	0.91	0.88	0.84	0.81	0.78
1.21	1.17	1.12	1.08	1.04	1.00	0.96	0.92	0.88	0.85	0.81
1.27	1.23	1.18	1.14	1.09	1.05	1.01	0.97	0.93	0.89	0.85
1.34	1.29	1.24	1.19	1.15	1.10	1.06	1.02	0.97	0.93	0.89
1.41	1.36	1.31	1.26	1.21	1.16	1.11	1.07	1.02	0.98	0.94
1.49	1.43	1.38	1.33	1.27	1.22	1.17	1.12	1.08	1.03	0.99
1.57	1.51	1.46	1.40	1.34	1.29	1.24	1.16	1.13	1.08	1.04
1.66	1.60	1.54	1.48	1.42	1.36	1.30	1.25	1.20	1.15	1.10
1.76	1.69	1.63	1.56	1.50	1.44	1.38	1.32	1.26	1.21	1.16
1.86	1.79	1.72	1.65	1.59	1.52	1.46	1.40	1.34	1.28	1.22
1.98	1.90	1.83	1.75	1.68	1.61	1.55	1.48	1.42	1.36	1.30
2.10	2.02	1.94	1.86	1.79	1.72	1.64	1.57	1.51	1.44	1.37
2.24	2.15	2.07	1.98	1.90	1.82	1.75	1.67	1.60	1.53	1.46
2.38	2.29	2.20	2.11	2.03	1.94	1.86	1.78	1.70	1.63	1.56
2.54	2.44	2.35	2.25	2.16	2.07	1.99	1.90	1.82	1.74	1.66
2.71	2.61	2.51	2.41	2.31	2.22	2.12	2.03	1.94	1.86	1.77
2.90	2.79	2.68	2.57	2.47	2.37	2.27	2.17	2.08	1.99	1.90
3.10	2.98	2.87	2.76	2.64	2.54	2.43	2.33	2.23	2.13	2.03
3.32	3.19	3.07	2.95	2.83	2.72	2.60	2.49	2.39	2.28	2.18
3.55	3.42	3.29	3.16	3.04	2.92	2.80	2.68	2.56	2.45	2.34
3.80	3.66	3.52	3.39	3.26	3.13	3.00	2.87	2.75	2.63	2.51
4.08	3.93	3.78	3.64	3.50	3.36	3.22	3.08	2.95	2.82	2.70
4.37	4.22	4.06	3.91	3.76	3.61	3.46	3.32	3.18	3.04	2.90
4.69	4.53	4.36	4.20	4.04	3.88	3.72	3.57	3.42	3.27	3.13
5.04	4.86	4.69	4.51	4.34	4.17	4.00	3.84	3.68	3.52	3.37
5.42	5.23	5.04	4.86	4.67	4.49	4.31	4.14	3.97	3.80	3.63









206\$01467999